

Физика

ИДЗ №2

1. Найти длину волны де Бройля для атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре 300 К.

Дано:

$$T = 300 \text{ K}$$

Найти: $\lambda = ?$

Решение:

Импульс атома водорода:

$$p = m \cdot v = m \cdot \langle v_{\text{кв}} \rangle \quad (1)$$

где m – масса атома водорода; v – скорость атома водорода.

Средняя квадратичная скорость атома водорода:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (2)$$

где k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура.

Длина волны де Бройля, подставляя (1) и (2):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \langle v_{\text{кв}} \rangle} = \frac{h}{m} \cdot \sqrt{\frac{m}{3kT}} = h \cdot \sqrt{\frac{N_A}{3MkT}} \quad (3)$$

где M – молярная масса атома водорода.

Проверим размерность формулы (3):

$$\begin{aligned} [\lambda] &= \left[h \cdot \sqrt{\frac{N_A}{MkT}} \right] = \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \sqrt{\frac{\text{моль}^{-1}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot \text{К}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{Дж}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}} = \text{м} \end{aligned}$$

Произведем вычисления:

$$\lambda = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \sqrt{\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 1,46 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}$$

Ответ: $\lambda = 1,46 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

2. Длина волны де Бройля для электрона в атоме водорода составляет 0,33 нм. Определить на какой орбите атома находится электрон и его кинетическую энергию.

Дано:	СИ:
$\lambda = 0,33 \text{ нм}$	$0,33 \cdot 10^{-9} \text{ м}$
Найти: $n = ? T = ?$	

Решение:

Согласно первому постулату Бора движение электрона вокруг ядра возможно только по определенным орбитам радиусы которых удовлетворяют соотношению:

$$L_n = m\nu r_n = n\hbar \quad \text{или} \quad L_n = m\nu r_n = n \cdot \frac{h}{2\pi} \quad (1)$$

где m – масса электрона; $\hbar = h / 2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ – постоянная Планка; $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ – постоянная Планка; ν – скорость электрона; n – номер орбиты (главное квантовое число).

Согласно теории Бора, электрон вращается вокруг ядра. При этом сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону центростремительное ускорение $a = \frac{\nu^2}{r_n}$. На основании второго за-

кона Ньютона можем записать:

$$\frac{|+e| \cdot |-e|}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = m \frac{\nu^2}{r_n} \quad (2)$$

где $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ – заряд электрона; $+e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ – заряд ядра; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф / м}$ – диэлектрическая постоянная.

Выразим из (1) скорость и подставим в (2):

$$\nu = \frac{n \cdot h}{2\pi m r_n} \quad (3)$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m}{r_n} \cdot \left(\frac{n \cdot h}{2\pi m r_n} \right)^2$$

$$\frac{e^2}{\varepsilon_0} = \frac{n^2 \cdot h^2}{\pi r_n m} \text{ или } r_n = \frac{\varepsilon_0 n^2 \cdot h^2}{\pi m e^2} \quad (4)$$

Подставим (4) в (3):

$$v = \frac{n \cdot h}{2\pi m \cdot \frac{\varepsilon_0 n^2 \cdot h^2}{\pi m e^2}} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 n h} \quad (5)$$

Импульс электрона, подставляя (5):

$$p = mv = \frac{m e^2}{2\varepsilon_0 n h} \quad (6)$$

Длина волны де Бройля, подставляя (6):

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\varepsilon_0 n h^2}{m e^2} \quad (7)$$

Из (7) находим:

$$n = \frac{m e^2 \lambda}{2\varepsilon_0 h^2} \quad (8)$$

Проверим размерность формулы (8):

$$\begin{aligned} [n] &= \left[\frac{m e^2 \lambda}{\varepsilon_0 h^2} \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл}^2 \cdot \text{м}}{\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{Кл} \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл} \cdot \text{В} \cdot \text{м}^2}{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} = \\ &= \frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{Дж}}{\text{Дж}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = \text{безразмерная величина} \end{aligned}$$

Произведем вычисления:

$$n = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 0,33 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^2} = 1$$

Кинетическая энергия электрона:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m e^4}{2\varepsilon_0^2 n^2 h^2} \quad (9)$$

Проверим размерность формулы (9):

$$[T] = \left[\frac{m e^4}{\varepsilon_0^2 n^2 h^2} \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл}^4}{\frac{\text{Ф}^2}{\text{м}^2} \cdot 1^2 \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл}^4 \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2 \cdot \text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} =$$

$$= \frac{\text{кг} \cdot \text{Кл}^2 \cdot \text{В}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \cdot \text{Дж}^2}{\text{Дж}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}$$

Произведем вычисления:

$$T = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^4}{2 \cdot (8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot 1^2 \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^2} = 8,66 \cdot 10^{-18} \text{ (Дж)}$$

Ответ: $n = 1$; $T = 8,66 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$.

3. Найти наименьшую и наибольшую длины волн спектральных линий водорода в ультрафиолетовой области спектра.

Дано:

Ультрафиолетовая серия водорода

Найти: $\lambda_{\text{наиб}} = ?$ $\lambda_{\text{наим}} = ?$

Решение:

Ультрафиолетовая серия водорода – серия Лаймана. Для серии Лаймана главное квантовое число: $n_1 = 1$.

Формула Бальмера-Ридберга:

$$\lambda = \frac{1}{R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)} \quad (1)$$

где n_1 – квантовое число нижнего уровня; n_2 – квантовое число верхнего уровня; R – постоянная Ридберга.

Наименьшая длина волны фотона будет при переходе электрона из бесконечности $n_2 = \infty$ на $n_1 = 1$:

$$\lambda_{\text{наим}} = \frac{1}{1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2} \right)} = 9,1 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

Наибольшая длина волны фотона будет при переходе электрона с $n_2 = 2$ на $n_1 = 1$:

$$\lambda_{\text{наиб}} = \frac{1}{1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Ответ: $\lambda_{\text{наим}} = 9,1 \cdot 10^{-8} \text{ м}$; $\lambda_{\text{наиб}} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

4. Какую ускоряющую разность потенциалов должны пройти электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел три спектральные линии? Найти длины волн этих серий.

Дано:

три спектральные линии

Найти: $\varphi = ? \lambda = ?$

Решение:

Чтобы появились три спектральные линии спектра водорода, энергии бомбардирующих электронов должно быть достаточно для перехода электрона в атоме водорода на третий энергетический уровень, тогда будем иметь переходы $1 \rightarrow 2$; $1 \rightarrow 3$; $2 \rightarrow 3$.

Для определения длины волн воспользуемся серийной формулой для атома водорода:

$$\frac{1}{\lambda} = R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

$$\text{или } \lambda = \frac{1}{R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)} \quad (1)$$

где $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга; n_1 – номер орбиты, на которую перешел электрон; n_2 – номер орбиты, с которой перешел электрон (n_1 и n_2 – главные квантовые числа).

Энергия, необходимая для перехода электрона в атоме водорода на третий уровень:

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = hcR \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (2)$$

где h – постоянная Планка; c – скорость света в вакууме.

Таким образом, наименьшая энергия бомбардирующих электронов:

$$\varepsilon = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot c \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м} / c \cdot 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) =$$

$$= 1,94 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = \frac{1,94 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж / эВ}} = 12,1 \text{ эВ}$$

Искомый потенциал:

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{e} = \frac{12,1 \text{ эВ}}{e} = 12,1 \text{ В}$$

Длина волны фотона при переходе электрона с $n_2 = 2$ на $n_1 = 1$:

$$\lambda_{2-1} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Длина волны фотона при переходе электрона с $n_2 = 3$ на $n_1 = 1$:

$$\lambda_{3-1} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Длина волны фотона при переходе электрона с $n_2 = 3$ на $n_1 = 2$:

$$\lambda_{3-2} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = 6,54 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

Ответ: $\varphi = 12,1 \text{ В}$; $\lambda_{2-1} = 1,21 \cdot 10^{-7} \text{ м}$; $\lambda_{3-1} = 1,02 \cdot 10^{-7} \text{ м}$; $\lambda_{3-2} = 6,54 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

5. В одномерный потенциальный ящик шириной l помещен электрон. Какова вероятность обнаружить электрон в основном состоянии в интервале $l/4 < x < 3l/4$.

Дано:

$$n = 1$$

$$\frac{l}{4} \leq x \leq \frac{3l}{4}$$

Найти: $W_1 - ?$

Решение:

Вероятность того, что частица будет находиться в интервале dx (от x до $x + dx$), пропорциональна этому интервалу и квадрату модуля волновой функции, описывающей данное состояние:

$$dW = |\psi_n(x)|^2 dx \quad (1)$$

Волновая функция частицы в потенциальном ящике в основном состоянии ($n = 1$):

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad (2)$$

где x – координата частицы в ящике; l – ширина ящика; n – главное квантовое число.

Вероятность обнаружить частицу в интервале $l/4 < x < 3l/4$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{\frac{l}{4}}^{\frac{3l}{4}} |\psi_1(x)|^2 dx = \int_{\frac{l}{4}}^{\frac{3l}{4}} \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) dx = \\ &= \frac{1}{l} \cdot \int_{\frac{l}{4}}^{\frac{3l}{4}} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)\right) dx = \frac{1}{l} \cdot \left(x - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}{\frac{2\pi}{l}} \right) \Bigg|_{\frac{l}{4}}^{\frac{3l}{4}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{l} \cdot \left(\frac{3l}{4} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot \frac{3l}{4}\right)}{\frac{2\pi}{l}} \right) - \frac{1}{l} \cdot \left(\frac{l}{4} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{l} \cdot \frac{l}{4}\right)}{\frac{2\pi}{l}} \right) = \\
&= \frac{3}{4} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2\pi} - \frac{1}{4} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0,818
\end{aligned}$$

Ответ: $W_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0,818.$

6. Частица массой 10^{-27} г помещена в потенциальный ящик шириной 0,25 нм. Вычислить разность энергий пятого и шестого энергетических уровней частицы. Ответ выразить в электрон-вольтах.

Дано:	СИ:
$m = 10^{-27}$ г	10^{-30} кг
$l = 0,25$ нм	$0,25 \cdot 10^{-9}$ м
Найти: $\Delta E_{6-5} = ?$	

Решение:

Собственное значение энергии для частицы, находящейся в бесконечно глубоком, прямоугольном потенциальном ящике:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2} \quad (1)$$

где m – масса частицы; n – главное квантовое число, \hbar – постоянная Планка.

Разность энергий четвертого и шестого энергетических уровней частицы:

$$\begin{aligned} E_{6-5} &= E_6 - E_5 = \frac{\pi^2 \hbar^2 6^2}{2ml^2} - \frac{\pi^2 \hbar^2 5^2}{2ml^2} = \frac{11\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} = \\ &= \frac{11\pi^2 (1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с})^2}{2 \cdot 10^{-30} \text{ кг} \cdot (0,25 \cdot 10^{-9} \text{ м})^2} = 9,57 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = \frac{9,57 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}}{1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}} = 59,8 \text{ эВ} \end{aligned}$$

Ответ: $E_{6-5} = 59,8$ эВ.

7. Найти число электронов в атоме, у которого в основном состоянии заполнены: K -, L -, M - слои и $4s$ -, $4p$ - и $4d$ - оболочки. Что это за атом?

Дано:

K , L , M -слои заполнены полностью

$4s$, $4p$, $4d$ -оболочки заполнены полностью

Найти: $N = ?$ атом = ?

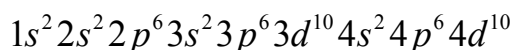
Решение:

K -слой – это уровень с главным квантовым числом $n = 1$: $1s^2$.

L -слой – это уровень с главным квантовым числом $n = 2$: $2s^2 2p^6$.

M -слой – это уровень с главным квантовым числом $n = 3$: $3s^2 3p^6 3d^{10}$.

Полностью заполненная $4s$ -оболочка: $4s^2$; полностью заполненная $4p$ -оболочка: $4p^6$; полностью заполненная $4d$ -оболочка: $4d^{10}$, Таким образом, электронная формула атома элемента имеет вид:

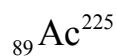


Число электронов в атоме $N = 46$. По периодической таблице Д.И. Менделеева определяем, что этот элемент – палладий Pd.

Ответ: $N = 46$, палладий.

8. Какая часть начального количества атомов радиоактивного актиния ${}_{89}\text{Ac}^{225}$ останется через 5 суток?

Дано:



$$t = 5 \text{ сут}$$

Найти: $\frac{N}{N_0} = ?$

Решение:

Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1)$$

где N_0 – начальное количество ядер ($t = 0$); N – число оставшихся ядер в момент времени t .

Постоянная радиоактивного распада:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad (2)$$

где $T_{1/2}$ – период полураспада.

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} = e^{-\frac{\ln 2}{10 \text{ сут}} \cdot 5 \text{ сут}} = 0,707 \text{ или } 70,7\%$$

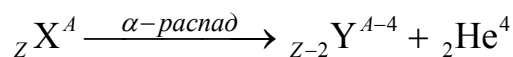
Ответ: $\frac{N}{N_0} = 0,707 \text{ или } 70,7\%$.

9. Вследствие радиоактивного распада ${}_{92}\text{U}^{238}$ превращается в ${}_{82}\text{Pb}^{206}$.

Сколько α - и β -распадов он при этом испытывает?

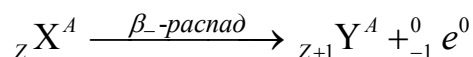
Решение:

Схема α -распада:



где ${}_2\text{He}^4$ – α -частица.

Схема β -минус-распада:



где ${}_{-1}^0e^0$ – электрон.

Из схем распадов видно, что изменение массового числа A происходит только при α -распаде, причем за один распад массовое число уменьшается на 4, следовательно, можно подсчитать число α -распадов:

$$\frac{238 - 206}{4} = 8 \text{ } \alpha\text{-распадов.}$$

При одном α -распаде зарядовое число уменьшается на 2, следовательно, при 8-ми α -распадах – на $8 \cdot 2 = 16$.

При одном β -распаде зарядовое число увеличивается на 1. Запишем уравнение:

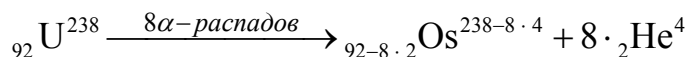
$$92 - 16 + x \cdot 1 = 82,$$

где x – число β -распадов

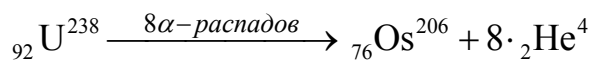
$$76 + x = 82$$

$$x = 82 - 76 = 6 \text{ } \beta\text{-распадов.}$$

Схема восьми α -распадов:

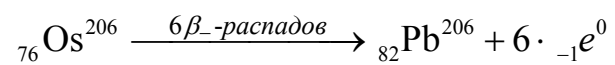
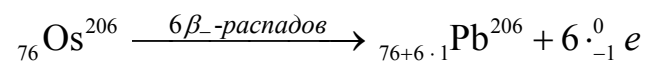


уран



осмий

Схема шести β -распадов:



свинец

Ответ: 8 α - и 6 β -распадов испытывает ${}_{92}\text{U}^{238}$.

10. Найти (в МэВ) минимальную энергию, необходимую для удаления одного протона из ядра азота ${}^1_7\text{N}$.

Дано:

ядро ${}^1_7\text{N}$

Найти: $\Delta E - ?$

Решение:

После удаления протона от ядра азота ${}^1_7\text{N}$ число нуклонов A в ядре атома азота уменьшится на единицу, и число протонов Z уменьшится на единицу, получится ядро ${}^{13}_6\text{C}$. Минимальная энергия, необходимая для удаления протона из ядра ${}^1_7\text{N}$ равна разности между энергиями связи ядра азота ${}^1_7\text{N}$ и ядра углерода ${}^{13}_6\text{C}$.

Дефект массы ядра определяется соотношением:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}} \quad (1)$$

где Z – зарядовое число; A – массовое число; m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона.

$$\text{Масса ядра: } M_{\text{я}} = M_a - Zm_e \quad (2)$$

где M_a – масса атома; m_e – масса электрона.

Следовательно,

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - M_a \quad (3)$$

Замечая, что $m_p + m_e = M_H$, где M_H – масса ядра водорода. Окончательно найдем

$$\Delta m = ZM_H + (A - Z) \cdot m_n - M_a \quad (4)$$

Энергию связи найдем из соотношения

$$\Delta E = \Delta mc^2 \quad (5)$$

Коэффициент пропорциональности c^2 может быть выражен двояко:

$$c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2 / \text{с}^2$$

$$\text{или } c^2 = \frac{\Delta E}{\Delta m} = 9 \cdot 10^{16} \text{ Дж / кг}$$

В последней формуле, перейдя к внесистемным единицам, получим

$$c^2 = 931 \text{ МэВ / а.е.м.}$$

С учетом этого искомая формула для энергии связи примет вид:

$$\Delta E = 931 \cdot \Delta m \text{ (МэВ)} \quad (6)$$

Подставим (4) в (6):

$$\Delta E = 931 \cdot [ZM_H + (A - Z) \cdot m_n - M_a] \quad (7)$$

Используя формулу (7) вычислим искомую энергию:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_N - E_C = 931 \cdot [7 \cdot M_H + (14 - 7) \cdot m_n - M_N] - \\ &- 931 \cdot [6 \cdot M_H + (13 - 6) \cdot m_n - M_C] = \\ &= 931 \cdot [M_H - M_N + M_C] = 931 \cdot [1,00783 - 14,00307 + 13,00335] = \\ &= 7,55 \text{ МэВ} \end{aligned}$$

Ответ: $\Delta E = 7,55 \text{ МэВ}$.

Список использованной литературы

1. Грабовский Р.И. Курс физики / Р.И. Грабовский. – СПб.: Лань, 2009. – 608 с.
2. Дмитриева В.Ф. Основы физики / В.Ф. Дмитриева, В.Л. Прокофьев. – М.: Высшая школа, 2003. – 527 с.
3. Общая физика / коллектив авторов; под ред. А.А. Воробьева. – М.: КНОРУС, 2016. – 800 с.
4. Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю. Физика. Атомная физика. Ядерная физика. Астрофизика: Учебник.- М.: Высшая школа, 2008. – 210 с.
5. Яворский Б.М. Основы физики: Колебания и волны. Квантовая физика. Физика ядра и элементарных частиц / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 552 с.