# 14. МОДЕЛИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ КАЧЕСТВА

#### Методические указания

Теоретический материал для выполнения практической работы изложен в лекции «Принятие решений на основе моделей обеспечения качества».

### Основы теории статистического контроля

Выборочный контроль, построенный на научной основе, т.е. исходящий из теории вероятностей и математической статистики, называют статистическим контролем. Предпринимателя и менеджера выборочный контроль может интересовать не только в связи с качеством продукции, но и в связи, например, с контролем экологической обстановки, поскольку зафиксированные государственными органами экологические нарушения влекут штрафы и иные "неприятные" последствия. Или в связи с выборочным контролем документации.

Обсудим основные подходы статистического контроля.

При статистическом контроле решение о генеральной совокупности - об экологической обстановке в данном регионе или о партии продукции - принимается по выборке, состоящей из некоторого количества единиц (единиц экологического контроля или единиц продукции). Следовательно, выборка должна представлять партию, т.е. быть репрезентативной (представительной). Как эти слова понимать, как проверить репрезентативность? Ответ может быть дан лишь в терминах вероятностных моделей выборки.

Наиболее распространенными являются две вероятностные модели - биномиальная и гипергеометрическая. В первой из них предполагается, что результаты контроля *n* единиц можно рассматривать как совокупность n независимых одинаково распределенных случайных величин *X1, X2,… Xn,,* где *Xi,=1*, если *i*-ое измерение показывает, что имеется нарушение, т.е. превышено ПДК (предельная норма концентрации) или *i*-ое изделие дефектно, и *Xi,=0*, если это не так. Тогда число *X* превышений ПДК (при другой интерпретации - дефектных единиц продукции в партии) равно:

*X= X1, X2,… Xn.* (1)

Известно, что распределение *X* имеет вид:

*P(X=k)=Cknpk(1-p)n-k,* (2)

где *Ckn* - число сочетаний из *n* элементов по *k*, а *p* - уровень дефектности (в другой предметной области - в экологии - доля превышений ПДК в генеральной совокупности), т.е. *p=P(Xi=1)*. Формула (2) задает так называемое биномиальное распределение.

Из формулы (1) и Центральной Предельной Теоремы теории вероятностей вытекает, что при увеличении объема выборки n распределение *X* сближается с нормальным распределением.

Вторая модель - гипергеометрическая - соответствует случайному отбору единиц в выборку. Пусть среди *N* единиц, составляющих генеральную совокупность, имеется *D* дефектных. Случайность отбора означает, что каждая единица имеет одинаковые шансы попасть в выборку. Более того, ни одна пара единиц не имеет преимущества перед любой другой парой при отборе в выборку. То же самое - для троек, четверок и т.д. Итак, каждое из сочетаний по *n* единиц из *N* имеет одинаковую вероятность быть отобранным в качестве выборки, равную, очевидно, 1/ *Ckn* .

Отбор случайной выборки согласно описанным правилам организуют при проведении различных лотерей. Пусть *Y* - число дефектных единиц в такой выборке. Известно, что тогда *P(Y=k) -* гипергеометрическое распределение, т.е.

P(Y=k)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^k}

Замечательный математический результат состоит в том, что биномиальная и гипергеометрическая модели весьма близки, когда объем генеральной совокупности (партии) по крайней мере в 10 раз превышает объем выборки. Таким образом, можно констатировать, что: *P(X=k)= P(Y=k)* (3)

с достаточной для практики точностью, если объем выборки мал по сравнению с объемом партии. При этом в качестве p в формуле (2) берут D/N.

Близость результатов, получаемых с помощью биномиальной и гипергеометрической моделей, весьма важна с методологической точки зрения. Дело в том, что эти модели исходят из принципиально различных методологических предпосылок. В биномиальной модели случайность присуща каждой единице - она с какой-то вероятностью дефектна, а с какой-то - годна. В то же время в гипергеометрической модели качество определенной единицы детерминировано, задано, а случайность проявляется лишь в отборе, вносится инженером, экологом или экономистом при составлении выборки.

В науках о человеке противоречие между двумя рассматриваемыми моделями выборки еще более выражено. Биномиальная модель предполагает, что поведение человека, в частности, выбор им определенного варианта при ответе на вопрос, определяется с участием случайных причин. Например, человек может случайно сказать "да", случайно - "нет". Некоторые философы отрицают присущую поведению человека случайность. Они верят в причинность и считают поведение конкретного человека практически полностью определенным (детерминированным) его взглядами, жизненным опытом, окружающей средой. Поэтому они принимают гипергеометрическую модель и считают, что случайность отличия ответов в выборке от ответов во всей генеральной совокупности определяется всецело случайностью, вносимой при отборе единиц наблюдения в выборку.

Соотношение (3) показывают, что во многих случаях нет необходимости выбирать одну из моделей, поскольку обе дают близкие численные результаты. Отличия проявляются при обсуждении вопроса о том, какую выборку считать представительной. Является ли таковой выборка, составленная из 20 изделий, лежащих сверху в первом вскрытом ящике? В биномиальной модели вполне допустим ответ "да", в гипергеометрической - только "нет".

Биномиальная модель легче для теоретического изучения, поэтому будем её рассматривать в дальнейшем. Однако при реальном контроле лучше формировать выборку, исходя из гипергеометрической модели. Это делают, выбирая номера изделий (для включения в выборку) с помощью датчиков псевдослучайных чисел на ЭВМ или с помощью таблиц псевдослучайных чисел. Алгоритмы формирования выборки встраивают в современные программные продукты по статистическому контролю.

**Оперативная характеристика плана статистического контроля.** Каковы свойства плана статистического контроля? Они, как правило, определяются с помощью функции *f(p)*, связывающей вероятность *p* дефектности единицы контроля с вероятностью *f(p)* приемки партии, положительной оценки экологической обстановки или заключения о правильности ведения бухгалтерской документации по результатам контроля. При этом вероятность p того, что конкретная единица дефектна, называется входным уровнем дефектности, а указанная функция называется оперативной характеристикой плана контроля. Если дефектные единицы отсутствуют, *p=0*, то партия всегда принимается, т.е. *f(0)=1*. Если все единицы дефектные, *p=1*, то партия наверняка бракуется, *f(1)=0*. Между этими крайними значениями *p* функция *f(p)* монотонно убывает. При изучении свойств плана входной уровень дефектности *P* - свободный параметр, он может принимать любые значения между *0* и *1*.

Вычислим оперативную характеристику плана (n,0). Поскольку партия принимается тогда и только тогда, когда все единицы являются годными, а вероятность того, что конкретная единица - годная, равна *(lp),* то оперативная характеристика имеет вид

*f(p)=P(X=0)=(1-p)n.*  (4)

Для плана *(n-1)* оперативная характеристика, как легко видеть, такова:

*f(p)= P(X=0+ P(X=1)= (1-p)n+np(1-p)n-1.* (5)

Оперативные характеристики для конкретных планов статистического контроля не всегда имеют такой простой вид, как в случае формул (4) и (5). Рассмотрим в качестве примера план (20, 0, 2) + (40, 0). Сначала найдем вероятность того, что партия будет принята по результатам контроля первой партии. Согласно формуле (4) имеем:

*f1(p)=P(X=0)=(1-p)20*.

Вероятность того, что понадобится контроль второй выборки, равна

*P(X=1)=20p(1-p)19*.

При этом вероятность того, что по результатам её контроля партия будет принята, равна

*f2(p)=P(X=0)=(1-p)40*.

Следовательно, вероятность того, что партия будет принята со второй попытки, т.е. что при контроле первой выборки обнаружится ровно одна дефектная единица, а затем при контроле второй - ни одной, равна

*f3(p)=P(X=1)f2(p)=20p(1-p)19(1-p)40=20p(1-p)59*.

Следовательно, вероятность принятия партии с первой или со второй попытки равна

*f(p)= f1(p)+ f3(p)= (1-p)20+20p(1-p)59*.

При практическом применении методов статистического приемочного контроля для нахождения оперативных характеристик планов контроля вместо формул, имеющих обозримый вид лишь для отдельных видов планов, применяют численные компьютерные алгоритмы или заранее составленные таблицы.

**Риск поставщика и риск потребителя, приемочный и браковочный уровни дефектности**. С оперативной характеристикой связаны важные понятия *приемочного и браковочного уровней дефектности*, а также понятия "риск поставщика" и "риск потребителя". Чтобы ввести эти понятия, на оперативной характеристике выделяют две характерные точки, делящие входные уровни дефектности на три зоны (области) – *А, Б* и *В*. В зоне *А* почти всегда все хорошо, а именно - почти всегда экологическая обстановка признается благополучной, почти все партии принимаются. В зоне *В*, наоборот, почти всегда все плохо, а именно - почти всегда экологический контроль констатирует экологические нарушения, почти все партии бракуются. Зона *Б* - буферная, переходная, промежуточная, в ней как вероятность приемки, так и вероятность браковки заметно отличаются от 0 и 1. Для задания границ между зонами выбирают два малых числа-риск поставщика (производителя, предприятия) α и риск потребителя (заказчика, системы экологического контроля) β, при этом границы между зонами задают два уровня дефектности - приемочный *рпр* и браковочный *рбр* , определяемые из уравнений

*f(рпр)=1-α,* *f(р,бр)=β* (6)

Таким образом, если входной уровень дефектности не превосходит *рпр*, то вероятность забракования партии мала, т.е. не превосходит *α*. Приемочный уровень дефектности выделяет зону *А* значений входного уровня дефектности, в которой нарушения экологической безопасности почти всегда не отмечаются, партии почти всегда принимаются, т.е. соблюдаются интересы проверяемого предприятия (в экологии), поставщика (при контроле качества). Это - зона комфортности для поставщика. Если он обеспечивает работу (входной уровень дефектности) в этой зоне, то его практически никогда никто не потревожит.

Если же входной уровень дефектности больше браковочного уровня дефектности *рбр*, то нарушения почти наверняка фиксируются, партия почти всегда бракуется, т.е. экологи узнают о нарушениях, потребитель оказывается защищен от попадания к нему партий со столь высоким уровнем брака. Поэтому можно сказать, что в зоне *В* соблюдаются интересы потребителей - брак к ним не попадает.

При выборе плана контроля часто начинают с выбора приемочного и браковочного уровней дефектности. При этом выбор конкретного значения приемочного уровня дефектности отражает интересы поставщика, а выбор конкретного значения браковочного уровня дефектности - интересы потребителя. Можно доказать (см. ниже), что для любых положительных чисел α и β и любых входных уровней дефектности *рпр* и *рбр*, причем *рпр* меньше *рбр*, найдется план контроля *(n,c)* такой, что его оперативная характеристика *f(p)* удовлетворяет неравенствам

*f(рпр)=1-α,* *f(р,бр)=β*

При практических расчетах обычно принимают *α=0,05* (т.е. 5%) и *β=0,1* (т.е. 10%).

В качестве примера вычислим приемочный и браковочный уровни дефектности для плана *(n,c)*. Из формул (4) и (6) вытекает, что

(1- *рпр)n=1-α, рпр=1-(1-α)1/n*.

Поскольку риск поставщика *α* мал, то из известного соотношения математического анализа

\sqrt{1-\alpha}=1-\frac{\alpha}{n}+O\left( \frac{\alpha^2}{n^2}\right)

вытекает приближенная формула: *рпр≈α/n*.

Для браковочного уровня дефектности имеем: *рбр=1-β1/n.*

При практическом применении методов статистического приемочного контроля аналитическими формулами, имеющими обозримый вид лишь для отдельных видов планов, не пользуются. Для нахождения приемочных и браковочных уровней дефектности планов контроля вместо них применяют численные компьютерные алгоритмы или заранее составленные таблицы. Такие таблицы имеются в нормативно-технической документации или научно-технических публикациях.

**Предел среднего выходного уровня дефектности.** Обсудим судьбу забракованной партии продукции. В зависимости от ситуации эта судьба может быть разной. Партия может быть утилизирована. Например, забракованная партия гвоздей может быть направлена на переплавку. У партии может быть понижена сортность, и она может быть продана по более низкой цене (при этом результаты выборочного контроля будут использованы не только для констатации того, что не выдержан заданный уровень качества, но и для оценки реального уровня качества). Наконец, партия продукции может быть подвергнута сплошному контролю (для этого обычно привлекают инженеров из всех заводских служб). При сплошном контроле все дефектные изделия обнаруживаются и либо исправляются на месте, либо извлекаются из партии. В результате в партии остаются только годные изделия. Такая процедура называется "контроль с разбраковкой".

При среднем входном уровне дефектности *P* и применении контроля с разбраковкой с вероятностью *f(p)* партия принимается (и уровень дефектности в ней по-прежнему равен *P*) и с вероятностью *(1- f(p))* бракуется и подвергается сплошному контролю, в результате чего к потребителю поступают только годные изделия. Следовательно, по формуле полной вероятности средний выходной уровень дефектности равен: *f1(p)=p f(p)+0(1- f(p))=pf(p).*

Средний выходной уровень дефектности *f1(p)* равен 0 при *p=0* и *p=1*, положителен на интервале *(0;1)*, а потому достигает на нем максимума, который в теории статистического контроля называется пределом среднего выходного уровня дефектности (сокращенно ПСВУД):

*ПСВУД=max0≤p≤1 f1(p)*

*Пример*. Рассмотрим план *(n,0)*. Для него *f(p)=(1-p)n* и   
*f1(p)=(1-p)n*. Чтобы найти ПСВУД, надо приравнять *0* производную среднего выходного уровня дефектности по среднему входному уровню дефектности:

\frac{df_1(p)}{dp}=(p(1-p)^n)\prime=(1-p)^n+pn(1-p)^{n-1}(-1)=(1-p)^{n-1}(1-p-pn)=(1-p)^{n-1}(1-(n+1)p)=0

В полученном уравнении корень р = 1соответствует минимуму, а не максимуму. Поскольку непрерывная функция на замкнутом отрезке достигает максимума, то максимум достигается при

p_n=\frac{1}{n+1}

Следовательно,

ПСВУД = p_n(1-p_n)^n=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n (7)

По выражению (7) могут быть проведены конкретные расчеты. Однако оно довольно громоздко. Его можно упростить, используя один замечательный предел из курса математического анализа, а именно:

 \varlimsup_{n \to \infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e^{-1}=\frac{1}{2,718281828}\approx0,368 (8)

Сравнивая соотношения (7) и (8), видим, что

ПСВУД = \left(\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}^{n+1}\right) 

Первая скобка равна *1/n*, а вторая согласно соотношению (8) приближается к 0,368 при росте объема выборки. Поэтому получаем простую асимптотическую формулу

ПСВУД \approx\frac{0,368}{n}

Для более сложных планов ПСВУД рассчитывают с помощью более или менее сложных компьютерных программ.

При проведенном выше рассмотрении основ статистического контроля расчетные формулы удалось получить лишь для простейших планов, в основном для планов вида *(n,0).* Если ослабить требования и рассчитывать не на точные формулы, а на асимптотические, при *n ⇨ ∞* , то можно справиться и с одноступенчатыми планами вида *(n,c)*.

**Асимптотическая теория одноступенчатых планов**. Пусть *X* - число дефектных единиц продукции в выборке объема *n*. Как уже отмечалось, распределение *X* является биномиальным и имеет вид:

*P(X=k)=Cknpk(1-p)n-k*,

где *Ckn* - число сочетаний из *n* элементов по *k*, а *p* - входной уровень дефектности.

Пусть используется одноступенчатый план контроля *(n,c)*. Тогда оперативная характеристика этого плана имеет вид

f_p)=\sum_{1\le k \le c}P(X=k)=\sum_{1 \le k \le c}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}

Пусть *n ⇨ ∞.* Тогда по Закону Больших Чисел теории вероятностей (по теореме Бернулли): *X/n ⇨ p* (сходимость по вероятности). Значит, если *c/n* окажется заметно больше входного уровня дефектности *p*, то партии будут почти всегда приниматься, а если *c/n* окажется заметно меньше входного уровня дефектности *P*, то партии будут почти всегда отклоняться. Ситуация будет нетривиальной только там, где величины *c/n* и *P* близки друг к другу.

Хотя оперативная характеристика рассчитывается с помощью сумм биномиальных вероятностей, анализировать эти суммы затруднительно. Поэтому целесообразно найти для нее приближение с помощью теоремы Муавра-Лапласа. Имеем цепочку тождественных преобразований:

f(p)=P(X \lec)=P \left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{c-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)

Справа строит именно то выражение, которое участвует в теореме Муавра-Лапласа. Воспользовавшись равномерной сходимостью в этой теореме, можно записать, что

\varlimsup_{n \to \infty} f(p)=Ф\left(\frac{c-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)

где *?(x)* - функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием *0* и дисперсией *1*.

Последняя формула позволяет указать асимптотические выражения для приемочного и браковочного уровней дефектности. Действительно, согласно определениям этих понятий

Ф\left(\frac{c-np_{np}}{\sqrt{np_{np}(1-p_{np})}}\right)=1-\alpha,\\
Ф\left(\frac{c-np_{bp}}{\sqrt{np-{bp}(1-p-{bp})}}\right)=\beta (9)

откуда с помощью элементарных преобразований получаем, что

p_{np}=\frac c n-\frac{1}{\sqrt n}\sqrt{\frac c n(1-\frac c n)}Ф^{-1}(1-\alpha),\\
P_{bp}=\frac c n-\frac{1}{\sqrt n}\sqrt{\frac c n(1-\frac c n)}Ф^{-1}(\beta) (10)

Так как величины *c/n* и *P* близки друг к другу, то при переходе от формулы (9) к формуле (10) в подкоренных выражениях приемочный и браковочный уровни дефектности заменены на *c/n* (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка).

Поскольку при практическом применении статистического приемочного контроля, как уже отмечалось, принимают *α=0,05*, *β=0,10*, то в предыдущие формулы следует подставить   
*Ф-1(0,05)=1,64* и *Ф-1(0,10)=-1,28*. Итак, итоговые формулы для приемочного и браковочного уровней дефектности имеют вид

p_{np}=\frac c n - \frac{1.64}{\sqrt n} \sqrt{\frac c n \left(1-\frac c n \right)},\\
P_{bn}=\frac c n - \frac{1.28}{\sqrt n} \sqrt{\frac c n \left(1-\frac c n \right)} 

Перейдем к задаче синтеза. Пусть заданы приемочный и браковочный уровни дефектности. Требуется построить одноступенчатый план, имеющий эти характеристики. Из формул (9) следует, в частности, что

c-np_{np}=Ф^{-1}(c-\alpha)\sqrt{np_{np}(1-p_{np})},\\
c-np_{bp}=Ф^{-1}(c-\beta)\sqrt{np_{bp}(1-p_{bp})} (11)

Вычитая из первого уравнения второе, получаем, что

 np_{bp}-np_{np}=\sqrt n\{Ф^{-1}(1-\alpha)\sqrt{p_{np}(1-p_{np}})-Ф^{-1}(\beta}\sqrt{p_{bp}(1-p_{bp})}\}

Следовательно, оценка *n\** необходимого объема выборки имеет вид

 n*= \left(\frac{ Ф^{-1}(1-\alpha)\sqrt{p_{np}(1-p_{np}}-Ф^{-1}(\beta}\sqrt{p_{bp}(1-p_{bp})}}{p_{bp}-p_{np}} \right)^2

Для стандартных значений рисков *α=0,05*, *β=0,10*, имеем:

n*= \left(\frac{1,64\sqrt{p_{np}(1-p_{np})}+1,28\sqrt{p_{bp}(1-p_{bp})}}{p_{bp}-p_{np}} \right)^2 (12)

С помощью уравнений (11) нетрудно найти оценку *c\** приемочного числа, заменив неизвестный объем выборки на его оценку *n\** . Будем использовать оценку

 c*=n*p_{bp}+Ф^{-1}(\beta)\sqrt{n*p_{bp}(1-p_{bp})}

Для стандартного значения *β=0,10* имеем

 c*=n*p_{bp}+1,28\sqrt{n*p_{bp}(1-p_{bp})} (13)

Итак, по формуле (12) можно рассчитать оценку объема выборки, затем по формуле (13) найти оценку приемочного числа. Необходимо отметить, что результаты расчетов по рассматриваемым асимптотическим формулам отнюдь не всегда дают целые числа, поэтому необходима корректировка полученных результатов.

Полученные формулы позволяют решить сформулированную выше задачу - по заданным приемочному и браковочному уровням дефектности подобрать такой одноступенчатый план контроля, что его оперативная характеристика *f(p)* удовлетворяет неравенствам

*f(pпр)≥1-α,*  *f(pбр)≥β.*

Поэтому при практической работе корректировка асимптотических результатов должна быть направлена на выполнение указанных неравенств.

*Пример*. Пусть *pпр=0,02, pбр=0,09*. Тогда по формуле (12) оценка объема выборки равна

 n*= \left(\frac{1,64\sqrt{0,02(1-0,02)}+1,28\sqrt{0,09(1-0,09)}}{0,09-0,02}\right)^2= \left(\frac{1,64*0,14+1,28*0,286}{0,07} \right)^2=8,51^2=72,42

Полученное число не является натуральным, поэтому вполне естественно откорректировать объем выборки до ближайшего целого, т.е. до *n\*=72*.

Оценку приемочного числа находим по формуле (13):

 c*=72*0,09-1,28\sqrt{72*0,09*0,91}=6,48-1,28*2,428=3,37

Полученное число не является целым, поэтому в качестве приемочного числа надо взять ближайшее целое, т.е. до 3.

Если объем выборки округлить до 73, то аналогично получим

 c**=73*0,09-1,28\sqrt{73*0,09*0,91}=6,57-1,28*2,445=3,44

При округлении снова получаем 3.

С помощью первого из уравнений (11) можно построить оценку с\* на основе приемочного уровня дефектности:

 c*=n*p_{np}+Ф^{-1}(1-\alpha)\sqrt{n*p_{np}(10p_{np})}=n*p_{np}+1,64\sqrt{n*p_{np}(1-p_{np})}

Подставив конкретные значения, получим практически ту же оценку, что и раньше:

c*= n*p_{np}+1,64\sqrt{n*p_{np}(1-p_{np})}=72*0,02+1,64\sqrt{72*0,02*0,98}=3,39

Итак, в результате асимптотических расчетов найден одноступенчатый план (72, 3).

**Оценка снизу необходимого объема выборки**. Как известно, в теории статистического приемочного контроля качества продукции разработано много подходов к выбору планов контроля:

* на основе приемочного и браковочного уровней дефектности;
* исходя из предела среднего выходного уровня дефектности (при контроле с разбраковкой);
* с использованием экономических показателей, относящихся к предприятию (см., например, ГОСТ 24660-81);
* с использованием экономических показателей, относящихся к народному хозяйству в целом; и т.д.

Имеется обширная литература, посвященная обоснованию и сравнению этих подходов, разработке соответствующей математической теории и программного обеспечения. Не углубляясь в эти проблемы, сосредоточим внимание на одном парадоксальном явлении: при повышении качества выпускаемой продукции теория рекомендует увеличивать объем контроля!

Действительно, при повышении качества выпускаемой продукции требования потребителя, очевидно, обеспечиваются все лучше. Следовательно, должен уменьшаться браковочный уровень дефектности, т.е. то значение входного уровня дефектности, при котором вероятность приемки партии равна риску потребителя. Из всех планов с общим объемом контроля n минимум вероятности приемки партии (т.е. оперативной характеристики) достигается на одноступенчатом плане *(n,0)*. (Напомним, что согласно этому плану партия принимается тогда и только тогда, когда из n проверенных единиц продукции все оказываются годными.) Другими словами, оперативная характеристика для плана *(n,0)* является огибающей (снизу) множества всех оперативных характеристик. Следовательно, из всех планов с общим объемом контроля n минимум браковочного уровня дефектности достигается также на плане *(n,0)*.

В дальнейшем будем исходить из биномиальной модели выборки, согласно которой число дефектных единиц продукции в выборке объема n имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, где p - входной уровень дефектности. Как хорошо известно, эта модель является приближением для модели простой случайной выборки из партии, согласно которой указанное число имеет гипергеометрическое распределение. Напомним, что по чисто математическим причинам гипергеометрическая модель переходит в биномиальную с параметрами *n,p*, когда объем партии *n* безгранично возрастает, а доля дефектных единиц продукции в партии приближается к p. Если объем выборки составляет не более 10% объема партии, то с достаточной для практики точностью принимают, что соответствующее биномиальное распределение хорошо приближает гипергеометрическое.

Примем обычное предположение о том, что риск потребителя равен 0,10. Как известно, браковочный уровень дефектности *pбр* для плана *(n,0)* определяется из условия

*(1- pбр)т=0,10.*

Это соотношение дает возможность по заданному браковочному уровню дефектности *pбр* найти необходимый объем выборки:

*n=ln0,10/ln(1- pбр)=-2,30/ln(1- pбр).*

Поскольку в силу сказанного ранее представляют интерес малые значения браковочного уровня дефектности, воспользуемся тем, что при малых x согласно правилам математического анализа

*ln(1+x)=x+O(x2)*.

Вторым слагаемым в правой части последней формулы, как обычно в асимптотических рассуждениях, можно пренебречь. Следовательно, необходимый объем выборки с достаточной точностью может быть найден по формуле

*n=2,30/ pбр (14)*

(При конкретных расчетах надо, очевидно, правую часть округлить до ближайшего целого числа.) Например, при довольно низком (с точки зрения мирового рынка) качестве выпускаемой продукции можно задать *pбр*=*0,01*, т.е. потребовать, чтобы почти все (точнее, не менее 90%) партии, в которых дефектных единиц больше, чем 1 из 100, были забракованы и не достигли потребителя. Тогда объем контроля должен составлять не менее *n=230*.

**От контроля к пополнению партии.** Рассмотрим простую идею: отказываемся от контроля качества вообще, но зато по первому требованию потребителя заменяем дефектную единицу продукции на новую. При этом экономим на контроле, но вместо этого тратим средства на замену продукции. Выгодно это или не выгодно?

Замена продукции может проводиться различными способами. Для многих видов товаров народного потребления это делается с помощью системы гарантийного обслуживания, гарантийных сроков и мастерских, через сеть розничной торговли и т.д.

Другой вариант - к партии поставляемой продукции добавляется некоторое количество единиц продукции для замены имеющихся, возможно, в ней дефектных единиц. Сначала обсудим подробнее именно этот вариант идеи замены продукции.

Пусть поставщик выпускает продукцию с известным ему уровнем дефектности *p*. Тогда число *Х* дефектных единиц в партии объема *N* имеет биномиальное распределение с параметрами *N* и p. По теореме Муавра-Лапласа *X* не превосходит (при достаточно большом *N*) величины: *D0(t)=Np+t(Np(1-p))1/2* с вероятностью *Ф(t)*, где *Ф(?)* - функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием *0* и дисперсией *1*. Поскольку *Ф(4)=0,999968329*, то для практических целей достаточно положить *t=4*, при этом более чем *D0(4)* дефектных единиц продукции попадет в партию лишь в 3 случаях из 100000 (при более точном расчете необходимо учесть отличие биномиального распределения от нормального, например, использовать неравенство Берри-Эссеена).

Пусть *C0* - цена одной единицы продукции, *C1* - стоимость неразрушающего контроля одной единицы продукции (с исправлением дефектов при их обнаружении). Сравним сначала две стратегии технико-экономических отношений поставщика с потребителями: сплошной контроль (затраты *C0N*) и пополнение партии дополнительными изделиями в числе *D0(4)* (затраты *C0 D0(4)*).

Вторая стратегия лучше (экономически выгоднее), если

C_1N>C_0D_0(4)=C_0(Np+4\sqrt{Np(1-p)}) (15)

Поделим на *C0N* получим равносильное неравенство

 \frac{C_1}{C_0}>p+4\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrtN}

Поскольку *p(1-p)* не превосходит 1/4 при всех *p*, то из неравенства:

C1/C0>p+2/N1/2 (16)

вытекает неравенство (15). Ясно, что в случае, если: C1/C0>p неравенство (16) (а потому и неравенство (15)) выполняется при достаточно больших объемах партии, а именно, при:   
N>{2C0/(C1- C0p)}2.

Например, если стоимость контроля составляет 10% от стоимости продукции (типовая ситуация в машиностроении), т.е. *C1/C0=0,1*, а уровень дефектности *p=0,01*, то последнее неравенство дает *N>493*. В то же время нетрудно проверить, что неравенство (15) выполняется при: *0,1>0,01+4(0,01?0,99)1/2V1/2*, т.е. при *N>19*. Расхождение более чем на порядок (в 26 раз) объясняется заменой при переходе от формулы (15) к формуле (16) величины *p(1-p)* на 1/4, т.е. на гораздо большую величину - при малом входном уровне дефектности *p*.

**От системы контроля к системе технического обслуживания.** Вернемся к первому из указанных ранее вариантов замены продукции. Что выгоднее - сплошной контроль на предприятии или замена дефектных изделий, обнаруженных потребителями? Реальное перекладывание контроля на потребителей влечет потери, связанные с удовлетворением их претензий, но при малой доле дефектных изделий эти потери малы по сравнению с затратами на контроль.

Действительно, пусть *W* - средние потери поставщика, связанные с пропуском потребителю дефектной единицы продукции. Сюда входят, в частности, такие виды потерь:

* стоимость новой единицы продукции (при замене изделия или возврате его стоимости);
* расходы системы распределения продукции и гарантийного ремонта, включая издержки на устранение дефектов;
* потери из-за нежелательного изменения предпочтений потребителя, из-за снижения имиджа фирмы;
* затраты на возмещение ущерба, понесенного потребителем, страховые сборы, судебные издержки, и т.д.

Потери *W* в несколько раз (по экспертной оценке - обычно в 5-10 раз) превышают расходы С_0 на изготовление единицы продукции. Кроме того, для быстрого решения проблем потребителей, связанных с обнаружением дефектов, необходима развитая система технического обслуживания.

Пусть изготовлена партия продукции объема *N*. Тогда расходы на сплошной (неразрушающий) контроль составляют С_1N (при этом дефектные единицы продукции извлекаются и утилизируются, расходами на утилизацию или доходами от нее в настоящем изложении пренебрегаем). Пусть *p* - доля дефектных единиц продукции в партии. Тогда *Np* - математическое ожидание числа дефектных единиц продукции в партии, а *WNp* - математическое ожидание потерь. Если:

*WNp< C1N, p< C1/W,* (17)

то выгоднее отказаться от сплошного контроля. При повышении качества, т.е. снижении доли дефектности, целесообразно переходить к поиску и устранению дефектов не непосредственно на предприятии, а в пунктах системы технического обслуживания.

В формуле (17) участвует математическое ожидание *WNp*. Реальные потери могут быть больше, но не намного. Как и выше, с помощью теоремы Муавра-Лапласа можно утверждать, что практически наверняка они не превышают *WD0(4)*, а потому преимущество решения об отказе от контроля неоспоримо при

*WD0(4)<C1N, p+4(p(1-p))1/2/N1/2< C1/W*. (18)

Аналогично выводу неравенства (16) заключаем, что неравенство (18) наверняка будет выполнено, если

*p+2N1/2<C1/W.* (19)

Пусть *C1/W=0,1*, выпускается партия объема *N=1600*. Тогда согласно неравенству (19) отказ от контроля выгоден уже при *p<0,05*, т.е. граничное значение соответствует довольно низкому уровню качества - 1 единица продукции из 20.

Выгодно ли в рассматриваемой ситуации вводить выборочный контроль? Пусть объем контроля равен n, приемочное число *c=0*, с вероятностью y партия принимается, а с вероятностью *1-y* бракуется (и затем подвергается разбраковке). В первом случае расходы на контроль равны *C1n*, а остальная часть партии содержит в среднем *(N-n)p* дефектных единиц продукции, и средние издержки равны *y{C1n+W((N-n)p)}*. Во втором случае суммарные затраты равны   
*(1-y)C1N*. Следовательно, введение контроля выгодно, если

*y{C1n+W((N-n)p)}+ (1-y)C1N<WNp.*

Преобразуем это неравенство к виду

*yn{C1-Wp}(1-y)-1+C1N<WNp.* (20)

Если выполнено неравенство *p<C1/W*, то второе слагаемое в левой части неравенства (20) больше правой части этого неравенства, в то время как первое слагаемое в левой части (20) положительно. Следовательно, неравенство (20) неверно, и введение выборочного контроля нецелесообразно - как и в разобранном ранее случае метода пополнения партий.

Выше приведен базовый (простейший, исходный) метод сравнения различных систем взаимоотношений поставщиков и потребителей. При разработке практически пригодных систем принятия решений целесообразно дальнейшее его развитие.

Отметим в заключение, что реально статистический контроль качества продукции, осуществляемый поставщиком (выходной контроль), решает две основные задачи: обеспечение интересов потребителя и обнаружение разладок собственных технологических процессов (по результатам контроля последовательности партий). Как показано выше, для решения первой из этих задач он не всегда оптимален. Вторую из названных задач также часто эффективнее решать с помощью иных методов, например, обнаруживать разладку технологических процессов с помощью тех или иных контрольных карт. Таким образом, область применения методов статистического приемочного контроля является довольно ограниченной. Очевидно, однако, что нельзя исключать эти методы из арсенала менеджеров по качеству, в частности, при использовании концепции "всеобщего управления качеством (TQM - Total Quality Management)". Хотя бы потому, что они незаменимы при использовании разрушающих методов контроля.

Наиболее перспективным представляется использование полученных результатов в рамках концепции контроллинга , точнее, в рамках такой научно-практической дисциплины, как контроллинг качества.

Итак, мы рассмотрели основной парадокс теории статистического приемочного контроля - повышение качества выпускаемой продукции приводит к увеличению объема контроля. Описан способ разрешения этого парадокса - на основе перехода от чисто технической политики выбора плана контроля к технико-экономической. Она исходит из сравнения по экономическим показателям схем контроля и схем технического обслуживания и пополнения партий. Проанализирован базовый метод такого сравнения, позволяющий выделить область экономического преимущества схемы пополнения партий и схемы технического обслуживания по сравнению со схемой контроля.

### Задания

1. Какие решения необходимо принимать в связи с качеством продукции и сертификацией?
2. Почему необходимо использование выборочного контроля?
3. Для плана (n, 0) с n = 27 найти приемочный уровень дефектности.
4. Для плана (n, 0) предел среднего выходного уровня дефектности не превышает t = 0,02. Каково минимально возможное n?
5. Даны приемочный уровень дефектности pпр = 0,03 и браковочный уровень дефектности pбр = 0,09. Указать какой-либо допустимый план вида (n, c), т.е. план, значение оперативной характеристики которого в точке pпр не меньше 0,95, а в точке pбр не больше 0,10.