ИДЗ 3-1 В-т 5

Тема 1.

$$y = \frac{1}{(2x+7)(3x+4)}$$

$x_0 = -1$

$x_1 = 1$

$h_1 = 0,5$

$h_2 = 0,25$

1 $h_1 = 0,5$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + f(x_{2n})\right)$$

Запишем узлы x_i

$x_0 = a = -1$

$x_1 = -0{,}5$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0{,}5$

$x_4 = 1$

Вычислим значения функции в узлах

x_i	y_i
-1	$0{,}2$
$-0{,}5$	$0{,}066667$
0	$0{,}035714$
$0{,}5$	$0{,}022727$
1	$0{,}015873$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2x+7)(3x+4)} =$$

$$= \frac{0,5}{3}\Big(0,2 + 4\cdot(0,06667 + 0,022727) +$$

$$+ 2\cdot 0,035714) + 0,015873\Big) \approx$$

$$\approx 0,107480$$

2. $h = 0,25$

n	x_i	y_i
0	-1	0,2
1	$-0,75$	0,103896
2	$-0,5$	0,066667
3	$-0,25$	0,047337
4	0	0,035714
5	0,25	0,02807
6	0,5	0,022727
7	0,75	0,018824
8	1	0,015873

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(2x+7)(3x+4)} =$$

$$= \frac{0{,}25}{3}\Big(0{,}2 + 4(0{,}103896 + 0{,}047337 +$$

$$+ 0{,}028074 + 0{,}018824) + 2(0{,}06667 +$$

$$+ 0{,}035714 + 0{,}022727) + 0{,}015873 \approx$$

$$\approx 0{,}104883$$

Уточним значение методом Рунге – Ромберга

1. Для $2h = 0{,}5$

$$F = F_{2h} + \frac{F_{2h} - F_h}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}$$

$$F_{2h} = \frac{0{,}5}{3}\left(y_0 + 4\cdot\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{i=1}^{4} y_{2i} + y_4\right) \approx 0{,}107480$$

$$F_h = \frac{0,25}{3}\left(0,2 + 4 \cdot 0,198127 + 2 \cdot 0,125108 + 0,015873\right) \approx 0,104883$$

$$F = 0,10748 + \frac{0,10748 - 0,104883}{-0,75} = 0,104018$$

Тогда погрешность равна

$0,104018 - 0,10748 = -0,00346$

2. Для $2h = 0,25$

$F_{2h} = 0,104883$

$$F_h = \frac{0,125}{3}\left(0,2 + 4 \cdot 0,411477 + 2 \cdot 0,323235 + 0,015873\right) = 0,10451$$

Погрешность $-0,00037$

Тема 2.

$$y = \frac{\lg(1+x)}{1+x^2}$$

$x_0 = 0$

$x_1 = 1$

$n = 5$

$$\int_a^b y\,dx \approx \left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)$$

$$\xi_i = \left(\frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right) x_i$$

	x_i	ξ_i	$f(\xi_i)$
0	0	0,5	0,140873
1	0,2	0,6	0,150088
2	0,4	0,7	0,154664
3	0,6	0,8	0,155654
4	0,8	0,9	0,154008
5	1	1	0,150515

$\sum f(\xi_i) = 0,905801$

$$\int_0^1 \frac{\lg(1+x)}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{2} \cdot 0,905801 =$$

$$= 0,452901$$

Тема 3

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{1}{3}$

$\varepsilon = 10^{-3}$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 +$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$f(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{2x}{3(1-x^2)^{4/3}}$$

$f'(0) = 0$

$$f''(x) = \frac{16x^2}{9(1-x^2)^{7/3}} + \frac{2}{3(1-x^2)^{4/3}}$$

$$f''(0) = \frac{2}{3}$$

$$f'''(x) = \frac{16x}{3(1-x^2)^{7/3}} + \frac{224x^3}{27(1-x^2)^{10/3}}$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = \frac{448x^2}{9(1-x^2)^{10/3}} + \frac{16}{3(1-x^2)^{7/3}} +$$

$$+ \frac{4480x^4}{81(1-x^2)^{\frac{13}{3}}}$$

$$f^{IV}(0) = \frac{16}{3}$$

$$f^{V}(x) = \frac{1120x}{9(1-x^2)^{10/3}} + \frac{116480x^5}{243(1-x^2)^{16/3}} +$$