

Физика

ИДЗ №2

Вариант №5

1. Чему равна относительная неопределенность импульса частицы, если неопределенность ее координаты равна дебройлевской длине волны этой частицы?

Дано:

$$\Delta x = \lambda$$

Найти: $\Delta p / p - ?$

Решение:

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга, микрочастица (микрообъект) не может иметь одновременно и определенную координату и определенную соответствующую проекцию импульса.

Соотношение неопределенностей для координаты и импульса частицы:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar \quad (1)$$

где Δp_x – неопределенность проекции импульса частицы на ось x ;

Δx – неопределенность ее координаты; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка.

Длина волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2)$$

По условию задачи: $x = \lambda$ (3)

Подставляем (2) в (1):

$$\Delta p_x \cdot \frac{h}{p} \geq \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{\Delta p_x}{p} \geq \frac{1}{2\pi} = 0,16$$

Ответ: $\frac{\Delta p_x}{p} = 0,16$.

2. Найти радиус первой боровской электронной орбиты для Li^{++} и скорость электрона на ней.

Дано:

Li^{++}

$n = 1$

Найти: $r_1 - ?$ $v_1 - ?$

Решение:

Согласно теории Бора, электрон, двигаясь по круговой орбите, имеет квантованные значения момента импульса:

$$L = m v_n r_n = n \hbar \quad (1)$$

где m – масса электрона; v_n – скорость электрона на n -й круговой орбите радиусом r_n ; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка; h – постоянная Планка; n – номер орбиты.

Из (1) радиус n -й круговой орбиты:

$$r_n = \frac{n \hbar}{2\pi m v_n} \quad (2)$$

На электрон, движущийся в водородоподобном ионе лития по n -й боровской орбите, действует кулоновская сила:

$$F = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \quad (3)$$

где Ze – заряд ядра, e – заряд электрона; ϵ_0 – диэлектрическая постоянная; Z – порядковый номер элемента в периодической системе Д.И. Менделеева (для лития $Z = 3$).

Эта сила является центростремительной и сообщает электрону нормальное ускорение:

$$a_y = \frac{v_n^2}{r_n} \quad (4)$$

По второму закону Ньютона:

$$F = ma_y \quad (4)$$

Подставляя (2), (3) в (4), получим:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = \frac{m v_n^2}{r_n} \quad (5)$$

Подставим (2) в (5): $\frac{2\pi m v_n Z e^2}{4\pi h n \epsilon_0} = m v_n^2$ (6)

Из (6): $v_n = \frac{Z e^2}{2 \epsilon_0 h n}$ (7)

Проверим размерность формулы (7):

$$[v_n] = \left[\frac{Ze^2}{\epsilon_0 h n} \right] = \frac{1 \cdot Кл^2}{\frac{\Phi}{м} \cdot Дж \cdot с \cdot 1} = \frac{1 \cdot Кл^2 \cdot м}{\frac{Кл}{В} \cdot Кл \cdot В \cdot с \cdot 1} = \frac{м}{с}$$

Произведем вычисления:

$$v_n = \frac{3 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1} = 6,54 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}$$

Подставим (7) в (2): $r_n = \frac{nh}{2\pi m \frac{Ze^2}{2\epsilon_0 h n}} = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m Ze^2}$ (8)

Проверим размерность формулы (8):

$$[r_n] = \left[\frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{m Ze^2} \right] = \frac{\frac{\Phi}{м} \cdot 1^2 \cdot Дж^2 \cdot с^2}{кг \cdot 1 \cdot Кл^2} = \frac{\frac{Кл}{В} \cdot Дж^2 \cdot с^2}{м \cdot кг \cdot Кл^2} = \frac{\frac{Кл}{В} \cdot Дж \cdot Кл \cdot В \cdot с^2}{м \cdot кг \cdot Кл^2} = \frac{Дж \cdot с^2}{м \cdot кг} = \frac{Н \cdot м}{Н} = м$$

Произведем вычисления:

$$r_n = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1^2 \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^2}{\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2} = 1,77 \cdot 10^{-11} \text{ (м)}$$

Ответ: $v_n = 6,54 \cdot 10^6 \text{ м/с}$; $r_n = 1,77 \cdot 10^{-11} \text{ м}$.

3. Сколько спектральных линий будет испускать атомарный водород, возбуждённый электронами, имеющими энергию 12,7эВ. Найти максимальную и минимальную длины испускаемого излучения.

Дано:	СИ:
$\varepsilon = 12,7 \text{ эВ}$	$12,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,032 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$
Найти: $N - ? \lambda_{\min} - ? \lambda_{\max} - ?$	

Решение:

Частоты линий в дискретном линейчатом спектре атома водорода описываются формулой Бальмера – Ридберга:

$$\nu = R' \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (1)$$

где $R' = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ – постоянная Ридберга; $n_1 = 1$ – главное квантовое число нижнего уровня; $n_2 = \infty$ – главное квантовое число верхнего уровня.

Энергия фотона:

$$\varepsilon = h\nu = hR' \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (2)$$

где h – постоянная Планка.

Из (2):

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_1^2} - \frac{\varepsilon}{hR'}}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 - \frac{2,032 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \cdot 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}}}} \approx 4$$

Таким образом, возможны переходы:

$$n_2 = 4 \rightarrow n_1 = 3 \quad n_2 = 4 \rightarrow n_1 = 2 \quad n_2 = 4 \rightarrow n_1 = 1$$

$$n_2 = 3 \rightarrow n_1 = 2 \quad n_2 = 3 \rightarrow n_1 = 1$$

$$n_2 = 2 \rightarrow n_1 = 1$$

Всего $N = 6$ переходов

Длины волн рассчитываем по формуле:

$$\lambda = \frac{1}{R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)} \quad (3)$$

где $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – постоянная Ридберга.

Максимальная длина волны будет при переходе $n_2 = 4 \rightarrow n_1 = 3$:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right)} = 1,875 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

Минимальная длина волны будет при переходе $n_2 = 4 \rightarrow n_1 = 1$:

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right)} = 9,72 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

Ответ: $N = 6$; $\lambda_{\max} = 1,875 \cdot 10^{-6} \text{ м}$; $\lambda_{\min} = 9,72 \cdot 10^{-8} \text{ м}$.

4. Вычислить массы фотонов, которые испускают: 1) атом водорода; 2) ион гелия He^+ ; 3) ион Li^{++} , находящиеся в первом возбужденном состоянии, при переходе их в основное состояние.

Дано:	СИ:
$\varepsilon = 12,7 \text{ эВ}$	$12,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2,032 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$
$n_1 = 1$	
$n_2 = 2$	
Найти: $m_{f(\text{H})} - ?$ $m_{f(\text{He}^+)} - ?$ $m_{f(\text{Li}^{++})} - ?$	

Решение:

Частоты линий в дискретном линейчатом спектре атома водорода описываются формулой Бальмера – Ридберга:

$$\nu = ZR' \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (1)$$

где $R' = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ – постоянная Ридберга; $n_1 = 1$ – главное квантовое число нижнего уровня; $n_2 = \infty$ – главное квантовое число верхнего уровня; Z – порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева.

Энергия фотона:

$$\varepsilon = h\nu = hZR' \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (2)$$

где h – постоянная Планка.

Массу фотона найдем из закона взаимосвязи массы и энергии $\varepsilon = m_f c^2$, подставляя (2):

$$m_f = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{hZR'}{c^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

$$m_f = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{hZR'}{c^2} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{hZR'}{c^2} \quad (3)$$

где c – скорость света в вакууме.

Проверим размерность формулы (3):

$$[m_f] = \left[\frac{hZR'}{c^2} \right] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot 1 \cdot \text{с}^{-1}}{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{H \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2}{\text{м}} = \text{кг}$$

По формуле (3) рассчитаем массу фотонов которые испускают: атом водорода; ион гелия He^+ ; ион Li^{++} , находящиеся в первом возбуждённом состоянии, при переходе их в основное состояние

$$m_{f(H)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1 \cdot 3,29 \cdot 10^{15}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 1,82 \cdot 10^{-35} \text{ (кг)}$$

$$m_{f(\text{He}^+)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3,29 \cdot 10^{15}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 3,64 \cdot 10^{-35} \text{ (кг)}$$

$$m_{f(\text{Li}^{++})} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3,29 \cdot 10^{15}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 5,45 \cdot 10^{-35} \text{ (кг)}$$

Ответ: $m_{f(H)} = 1,82 \cdot 10^{-35} \text{ кг}$; $m_{f(\text{He}^+)} = 3,64 \cdot 10^{-35} \text{ кг}$; $m_{f(\text{Li}^{++})} = 5,45 \cdot 10^{-35} \text{ кг}$.

5. Какова вероятность обнаружить частицу в первой четверти потенциального ящика, если она находится в основном состоянии?

Дано:

$$0 < x < \frac{1}{4}l$$

Найти: W – ?

Решение:

Волновая функция, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l , имеет вид:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (1)$$

где x – координата частицы в яме; l – ширина ямы; n – главное квантовое число.

Волновая функция частицы в потенциальной яме в основном состоянии (главное квантовое число $n = 1$):

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \quad (2)$$

Искомая вероятность находится интегрированием в пределах от 0 до $\frac{l}{4}$:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{l}{4}} |\psi_1(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{l}{4}} \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right) dx = \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{4}} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)\right) dx = \\ &= \frac{1}{l} \left(x - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}{\frac{2\pi}{l}} \right) \Bigg|_0^{\frac{l}{4}} = \frac{1}{l} \left(\frac{l}{4} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \approx 0,0908 \end{aligned}$$

Ответ: $W = 0,0908$.

6. Какой ширины потенциальный ящик надо взять, чтобы частица массой 10^{-28} кг имела дискретный спектр? Почему?

Дано:

$$m = 10^{-28} \text{ кг}$$

Найти: $l - ?$

Решение:

Собственное значение энергии для частицы, находящейся в бесконечно глубоком, прямоугольном потенциальном ящике:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2} \quad (1)$$

где m – масса частицы; n – главное квантовое число, \hbar – постоянная Планка.

Наибольшая дискретность (наибольшая разность энергий) наблюдается между первым уровнем ($n = 1$) и вторым уровнем $n = 2$:

$$\Delta E_{2-1} = \frac{\pi^2 \hbar^2 2^2}{2ml^2} - \frac{\pi^2 \hbar^2 1^2}{2ml^2} = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \quad (2)$$

Для оценки дискретности спектра сравним энергию между уровнями со средней энергией теплового движения частицы – kT (где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, примем $T = 273 \text{ K}$):

$$kT = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \quad (3)$$

$$\text{Из (3): } l = \sqrt{\frac{3\pi^2 \hbar^2}{2mkT}} = \pi \hbar \sqrt{\frac{3}{2mkT}} \quad (4)$$

Проверим размерность формулы (4):

$$\begin{aligned} [l] &= \left[\hbar \sqrt{\frac{1}{mkT}} \right] = \sqrt{\frac{\text{Дж}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot \text{К}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}}} = \text{м} \end{aligned}$$

Произведем вычисления:

$$l = \pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 10^{-28} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}} = 6,58 \cdot 10^{-10} \text{ (м)}$$

При размерах потенциального ящика меньше l спектр будет дискретным, при бо'льших значениях l дискретность сглаживается.

7. Найти число электронов в атоме, у которого в основном состоянии заполнены K , L , M -слои и $4s$ -, $4p$ -оболочки полностью, а $4d$ -оболочка – наполовину. Что это за атом?

Дано:

K , L , M -слои и $4s$ -, $4p$ -оболочки полностью заполнены
 $4d$ -оболочка

Найти: N_e – ? атом – ?

Решение:

K -слой – это уровень с главным квантовым числом $n = 1$: $1s^2$.

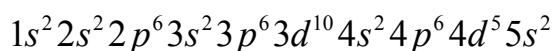
L -слой – это уровень с главным квантовым числом $n = 2$: $2s^2 2p^6$.

M -слой – это уровень с главным квантовым числом $n = 3$: $3s^2 3p^6 3d^{10}$.

Полностью заполненная $4s$ -оболочка: $4s^2$, полностью заполненная $4p$ -оболочка: $4p^6$, наполовину заполненная $4d$ -оболочка: $4d^5$.

Кроме того, раз заполняется $4d^5$, то оболочка $5s$ уже заполнена.

Таким образом, электронная формула атома имеет вид:



В атоме $N_e = 43$ электрона. Число электронов в атоме химического элемента равно его порядковому номеру в таблице Менделеева, определяем по ней, что этот элемент – технеций Тс.

Ответ: $N_e = 43$; технеций Тс.

8. За какой промежуток времени из 10^7 атомов актиния распадется один атом?

Дано:

$$N = 10^7 \text{ атомов}$$

$$\Delta N = 1 \text{ атом}$$

Найти: $t - ?$

Решение:

Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad (1)$$

где N – число нераспавшихся радиоактивных ядер (атомов) в момент времени t ; N_0 – начальное число радиоактивных ядер в момент времени $t = 0$; $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ – постоянная радиоактивного распада; $T_{1/2}$ – период полураспада

да (для актиния $T_{1/2} = 10 \text{ сут} = 10 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с} = 8,64 \cdot 10^5 \text{ с}$).

Число, распавшихся атомов актиния, равно разности начального числа радиоактивных атомов и числа нераспавшихся радиоактивных атомов:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} \right) \quad (2)$$

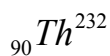
Из (2):

$$t = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln \left(1 - \frac{\Delta N}{N_0} \right) = -\frac{8,64 \cdot 10^5 \text{ с}}{\ln 2} \ln \left(1 - \frac{1}{10^7} \right) = 0,125 \text{ с}$$

Ответ: $t = 0,125 \text{ с}$.

9. Какой изотоп образуется из ${}_{90}\text{Th}^{232}$ после четырех α и двух β -распадов?

Дано:



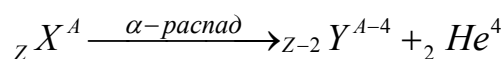
четыре α -распада

два β -распада

Найти: ${}_Z X^A - ?$

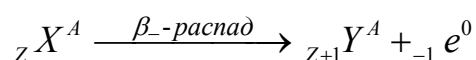
Решение:

Схема α -распада:



где ${}_2^4\text{He}$ – α -частица.

Схема β_- -распада:



где ${}_{-1}^0 e$ – электрон.

Схема четырех α -распадов:

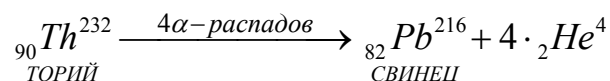
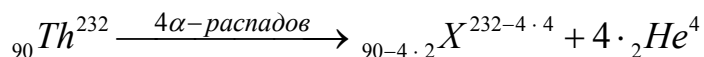
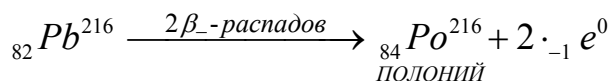
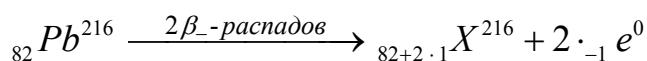


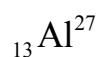
Схема двух β -распадов:



Ответ: после четырех α и двух β -распадов из ${}_{90}\text{Th}^{232}$ образуется Изотоп полония ${}_{84}\text{Po}^{216}$.

10. Найдите (в МэВ) энергию связи ядра атома алюминия ${}_{13}\text{Al}^{27}$.

Дано:



Найти: $E_{св}$ – ?

Решение:

Дефект массы ядра:

$$\begin{aligned}\Delta m &= Z \cdot m_{{}_1\text{H}} + (A - Z) \cdot m_n - m_a = \\ &= 13 \cdot 1,00783 \text{ а.е.м.} + (27 - 13) \cdot 1,00867 \text{ а.е.м.} - 26,98135 \text{ а.е.м.} = \\ &= 0,24182 \text{ а.е.м.}\end{aligned}$$

где $m_{{}_1\text{H}}$ – масса атома ${}^1_1\text{H}$; m_n – масса нейтрона; m_a – масса атома ${}_{13}\text{Al}^{27}$; Z – зарядовое число; A – массовое число.

Энергия связи:

$$E_{св} = 931 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}} \cdot 0,24182 \text{ а.е.м.} = 225,13 \text{ МэВ}$$

Ответ: $E_{св} = 225,13 \text{ МэВ}$.

Список использованной литературы

1. Грабовский Р.И. Курс физики / Р.И. Грабовский. – СПб.: Лань, 2009. – 608 с.
2. Детлаф А.А. Курс физики: учебник / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высшая школа, 2002. – 718 с.
3. Дмитриева В.Ф. Основы физики / В.Ф. Дмитриева, В.Л. Прокофьев. – М.: Высшая школа, 2003. – 527 с.
4. Общая физика / коллектив авторов; под ред. А.А. Воробьева. – М.: КНОРУС, 2016. – 800 с.
5. Яворский Б.М. Основы физики: Колебания и волны. Квантовая физика. Физика ядра и элементарных частиц / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 552 с.