Физика

ИДЗ№2

Вариант №5

1. Чему равна относительная неопределенность импульса частицы, если неопределенность ее координаты равна дебройлевской длине волны этой частицы?

Дано:

$\Delta x = \lambda$

Найти: $\Delta p / p - ?$

Решение:

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга, микрочастица (микрообъект) не может иметь одновременно и определенную координату и определенную соответствующую проекцию импульса.

Соотношение неопределенностей для координаты и импульса частицы:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar \qquad (1)$$

где $\Delta p_x -$ неопределенность проекции импульса частицы на ось x; $\Delta x -$ неопределенность ее координаты; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка.

Длина волны де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad (2)$$

По условию задачи: $x = \lambda$ (3)

Подставляем (2) в (1):

$$\Delta p_x \cdot \frac{h}{p} \geq \frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{\Delta p_x}{p} \geq \frac{1}{2\pi} = 0{,}16$$

Ответ: $\dfrac{\Delta p_x}{p} = 0{,}16$.

2. Найти радиус первой боровской электронной орбиты для Li^{++} и скорость электрона на ней.

Дано:

Li^{++}

$n = 1$

Найти: $r_1 - ?$ $\upsilon_1 - ?$

Решение:

Согласно теории Бора, электрон, двигаясь по круговой орбите, имеет квантованные значения момента импульса:

$$L = m\upsilon_n r_n = n\hbar \qquad (1)$$

где $m -$ масса электрона; $\upsilon_n -$ скорость электрона на n-й круговой орбите радиусом r_n; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} -$ постоянная Планка; $h -$ постоянная Планка; $n -$ номер орбиты.

Из (1) радиус n-й круговой орбиты:

$$r_n = \frac{nh}{2\pi m\upsilon_n} \qquad (2)$$

На электрон, движущийся в водородоподобном ионе лития по n-й боровской орбите, действует кулоновская сила:

$$F = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} \qquad (3)$$

где $Ze -$ заряд ядра, $e -$ заряд электрона; $\varepsilon_0 -$ диэлектрическая постоянная; $Z -$ порядковый номер элемента в периодической системе Д.И. Менделеева (для лития $Z = 3$).

Эта сила является центростремительной и сообщает электрону нормальное ускорение:

$$a_ц = \frac{\upsilon_n^2}{r_n} \qquad (4)$$

По второму закону Ньютона:

$$F = ma_ц \tag{4}$$

Подставляя (2), (3) в (4), получим:

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{m\upsilon_n^2}{r_n} \tag{5}$$

Подставим (2) в (5): $\dfrac{2\pi m\upsilon_n Ze^2}{4\pi hn\varepsilon_0} = m\upsilon_n^2$ (6)

Из (6): $\upsilon_n = \dfrac{Ze^2}{2\varepsilon_0 hn}$ (7)

Проверим размерность формулы (7):

$$[\upsilon_n] = \left[\frac{Ze^2}{\varepsilon_0 hn}\right] = \frac{1 \cdot Кл^2}{\dfrac{Ф}{м} \cdot Дж \cdot с \cdot 1} = \frac{1 \cdot Кл^2 \cdot м}{\dfrac{Кл}{В} \cdot Кл \cdot В \cdot с \cdot 1} = \frac{м}{с}$$

Произведем вычисления:

$$\upsilon_n = \frac{3 \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 1} = 6{,}54 \cdot 10^6 \ (м/с)$$

Подставим (7) в (2): $r_n = \dfrac{nh}{2\pi m \dfrac{Ze^2}{2\varepsilon_0 hn}} = \dfrac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{\pi m Ze^2}$ (8)

Проверим размерность формулы (8):

$$[r_n] = \left[\frac{\varepsilon_0 n^2 h^2}{mZe^2}\right] = \frac{\dfrac{Ф}{м} \cdot 1^2 \cdot Дж^2 \cdot с^2}{кг \cdot 1 \cdot Кл^2} = \frac{\dfrac{Кл}{В} \cdot Дж^2 \cdot с^2}{м \cdot кг \cdot Кл^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{Кл}{В} \cdot Дж \cdot Кл \cdot В \cdot с^2}{м \cdot кг \cdot Кл^2} = \frac{Дж \cdot с^2}{м \cdot кг} = \frac{Н \cdot м}{Н} = м$$

Произведем вычисления:

$$r_n = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1^2 \cdot \left(6{,}63 \cdot 10^{-34}\right)^2}{\pi \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2} = 1{,}77 \cdot 10^{-11} \ (м)$$

Ответ: $\upsilon_n = 6{,}54 \cdot 10^6$ $м/с$; $r_n = 1{,}77 \cdot 10^{-11}$ $м$.

3. Сколько спектральных линий будет испускать атомарный водород, возбуждённый электронами, имеющими энергию 12,7эВ. Найти максимальную и минимальную длины испускаемого излучения.

Дано:	СИ:
$\varepsilon = 12,7\ эВ$	$12,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ Дж = 2,032 \cdot 10^{-18}\ Дж$
Найти: $N - ?\ \lambda_{\min} - ?\ \lambda_{\max} - ?$	

Решение:

Частоты линий в дискретном линейчатом спектре атома водорода описываются формулой Бальмера – Ридберга:

$$\nu = R' \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (1)$$

где $R' = 3,29 \cdot 10^{15}\ c^{-1}$ – постоянная Ридберга; $n_1 = 1$ – главное квантовое число нижнего уровня; $n_2 = \infty$ – главное квантовое число верхнего уровня.

Энергия фотона:

$$\varepsilon = h\nu = hR\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (2)$$

где h – постоянная Планка.

Из (2):

$$n_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_1^2} - \frac{\varepsilon}{hR}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1^2} - \frac{2,032 \cdot 10^{-18}\ Дж}{6,63 \cdot 10^{-34}\ Дж \cdot c \cdot 3,29 \cdot 10^{15}\ c^{-1}}}} \approx 4$$

Таким образом, возможны переходы:

$n_2 = 4 \to n_1 = 3$ $\quad n_2 = 4 \to n_1 = 2$ $\quad n_2 = 4 \to n_1 = 1$

$n_2 = 3 \to n_1 = 2$ $\quad n_2 = 3 \to n_1 = 1$

$n_2 = 2 \to n_1 = 1$

Всего $N = 6$ *переходов*

Длины волн рассчитываем по формуле:

$$\lambda = \frac{1}{R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)} \qquad (3)$$

где $R = 1{,}097 \cdot 10^7\ м^{-1}$ – постоянная Ридберга.

Максимальная длина волны будет при переходе $n_2 = 4 \rightarrow n_1 = 3$:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7\ м^{-1} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right)} = 1{,}875 \cdot 10^{-6}\ м$$

Минимальная длина волны будет при переходе $n_2 = 4 \rightarrow n_1 = 1$:

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7\ м^{-1} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right)} = 9{,}72 \cdot 10^{-8}\ м$$

Ответ: $N = 6$; $\lambda_{\max} = 1{,}875 \cdot 10^{-6}\ м$; $\lambda_{\min} = 9{,}72 \cdot 10^{-8}\ м$.

4. Вычислить массы фотонов, которые испускают: 1) атом водорода; 2) ион гелия He^{+}; 3) ион Li^{++} , находящиеся в первом возбуждённом состоянии, при переходе их в основное состояние.

Дано:	СИ:
$\varepsilon = 12,7\ эВ$	$12,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ Дж = 2,032 \cdot 10^{-18}\ Дж$
$n_1 = 1$	
$n_2 = 2$	
Найти: $m_{f(\mathrm{H})} - ?\ m_{f\left(\mathrm{He}^{+}\right)} - ?\ m_{f\left(\mathrm{Li}^{++}\right)} - ?$	

Решение:

Частоты линий в дискретном линейчатом спектре атома водорода описываются формулой Бальмера – Ридберга:

$$\nu = ZR' \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \qquad (1)$$

где $R' = 3,29 \cdot 10^{15}\ c^{-1}$ – постоянная Ридберга; $n_1 = 1$ – главное квантовое число нижнего уровня; $n_2 = \infty$ – главное квантовое число верхнего уровня; Z – порядковый номер элемента в периодической системе Менделеева.

Энергия фотона:

$$\varepsilon = h\nu = hZR' \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \qquad (2)$$

где h – постоянная Планка.

Массу фотона найдем из закона взаимосвязи массы и энергии $\varepsilon = m_f c^2$, подставляя (2):

$$m_f = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{hZR'}{c^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

$$m_f = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{hZR'}{c^2} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{hZR'}{c^2} \qquad (3)$$

где c – скорость света в вакууме.

Проверим размерность формулы (3):

$$\left[m_f\right]=\left[\frac{hZR'}{c^2}\right]=\frac{Дж\cdot c\cdot 1\cdot c^{-1}}{\frac{м^2}{c^2}}=\frac{H\cdot м\cdot c^2}{м^2}=\frac{кг\cdot\frac{м}{c^2}\cdot c^2}{м}=кг$$

По формуле (3) рассчитаем массу фотонов которые испускают: атом водорода; ион гелия He^+; ион Li^{++} , находящиеся в первом возбуждённом со-стоянии, при переходе их в основное состояние

$$m_{f(H)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 1\cdot 3,29\cdot 10^{15}}{\left(3\cdot 10^8\right)^2}=1,82\cdot 10^{-35}\ (кг)$$

$$m_{f\left(He^+\right)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 2\cdot 1\cdot 3,29\cdot 10^{15}}{\left(3\cdot 10^8\right)^2}=3,64\cdot 10^{-35}\ (кг)$$

$$m_{f\left(Li^{++}\right)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 1\cdot 3,29\cdot 10^{15}}{\left(3\cdot 10^8\right)^2}=5,45\cdot 10^{-35}\ (кг)$$

Ответ: $m_{f(H)}=1,82\cdot 10^{-35}$ *кг*; $m_{f\left(He^+\right)}=3,64\cdot 10^{-35}$ *кг*; $m_{f\left(Li^{++}\right)}=5,45\cdot 10^{-35}$ *кг*.

5. Какова вероятность обнаружить частицу в первой четверти потенциального ящика, если она находится в основном состоянии?

Дано:

$0 < x < \frac{1}{4}l$

Найти: $W - ?$

Решение:

Волновая функция, описывающая состояние частицы в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l, имеет вид:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (1)$$

где $x -$ координата частицы в яме; $l -$ ширина ямы; $n -$ главное квантовое число.

Волновая функция частицы в потенциальной яме в основном состоянии (главное квантовое число $n = 1$):

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \qquad (2)$$

Искомая вероятность находится интегрированием в пределах от 0 до $\frac{l}{4}$:

$$W = \int_0^{\frac{l}{3}} \left|\psi_1(x)\right|^2 dx = \int_0^{\frac{l}{4}} \frac{2}{l}\sin^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx = \frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{4}}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{l}\left(x - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right)}{\frac{2\pi}{l}}\right)\Bigg|_0^{\frac{l}{4}} = \frac{1}{l}\left(\frac{l}{4} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}0908$$

Ответ: $W = 0{,}0908$.

6. Какой ширины потенциальный ящик надо взять, чтобы частица массой 10^{-28} кг имела дискретный спектр? Почему?

Дано:

$m = 10^{-28}$ *кг*

Найти: $l - ?$

Решение:

Собственное значение энергии для частицы, находящейся в бесконечно глубоком, прямоугольном потенциальном ящике:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2} \qquad (1)$$

где $m-$масса частицы; $n-$главное квантовое число, $\hbar-$постоянная Планка.

Наибольшая дискретность (наибольшая разность энергий) наблюдается между первым уровнем $(n=1)$ и вторым уровнем $n=2$:

$$\Delta E_{2-1} = \frac{\pi^2 \hbar^2 2^2}{2ml^2} - \frac{\pi^2 \hbar^2 1^2}{2ml^2} = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \qquad (2)$$

Для оценки дискретности спектра сравним энергию между уровнями со средней энергией теплового движения частицы $- kT$ (где $k-$постоянная Больцмана, $T-$абсолютная температура, примем $T = 273\ K$):

$$kT = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \qquad (3)$$

Из (3): $l = \sqrt{\frac{3\pi^2 \hbar^2}{2mkT}} = \pi\hbar\sqrt{\frac{3}{2mkT}}$ (4)

Проверим размерность формулы (4):

$$[l] = \left[\hbar\sqrt{\frac{1}{mkT}}\right] = \sqrt{\frac{Дж^2 \cdot c^2}{кг \cdot \frac{Дж}{K} \cdot K}} = \sqrt{\frac{Дж \cdot c^2}{кг}} = \sqrt{\frac{H \cdot м \cdot c^2}{кг}} =$$

$$= \sqrt{\frac{кг \cdot \frac{м}{c^2} \cdot м \cdot c^2}{кг}} = м$$

Произведем вычисления:

$$l = \pi \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 10^{-28} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}} = 6{,}58 \cdot 10^{-10}\ (м)$$

При размерах потенциального ящика меньше l спектр будет дискретным, при бо'льших значениях l дискретность сглаживается.

7. Найти число электронов в атоме, у которого в основном состоянии заполнены K, L, M -слои и $4s$ -, $4p$ -оболочки полностью, а $4d$ -оболочка – наполовину. Что это за атом?

Дано:

K, L, M -слои и $4s$ -, $4p$ -оболочки полностью заполнены

$4d$ -оболочка

Найти: $N_e - ?$ $атом - ?$

Решение:

K -слой – это уровень с главным квантовым числом $n = 1$: $1s^2$.

L -слой – это уровень с главным квантовым числом $n = 2$: $2s^2 2p^6$.

M -слой – это уровень с главным квантовым числом $n = 3$: $3s^2 3p^6 3d^{10}$.

Полностью заполненная $4s$ -оболочка: $4s^2$, полностью заполненная $4p$ -оболочка: $4p^6$, наполовину заполненная $4d$ -оболочка: $4d^5$.

Кроме того, раз заполняется $4d^5$, то оболочка $5s$ уже заполнена.

Таким образом, электронная формула атома имеет вид:

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^5 5s^2$

В атоме $N_e = 43$ электрона. Число электронов в атоме химического элемента равно его порядковому номеру в таблице Менделеева, определяем по ней, что этот элемент – технеций Tc.

Ответ: $N_e = 43$; технеций Tc.

8. За какой промежуток времени из 10^7 атомов актиния распадется один атом?

Дано:

$N = 10^7$ *атомов*

$\Delta N = 1$ *атом*

Найти: $t - ?$

Решение:

Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \qquad (1)$$

где $N -$ число нераспавшихся радиоактивных ядер (атомов) в момент времени t; $N_0 -$ начальное число радиоактивных ядер в момент времени $t = 0$; $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$ – постоянная радиоактивного распада; $T_{1/2} -$ период полураспада (для актиния $T_{1/2} = 10\ сут = 10 \cdot 24 \cdot 3600\ c = 8{,}64 \cdot 10^5\ c$).

Число, распавшихся атомов актиния, равно разности начального числа радиоактивных атомов и числа нераспавшихся радиоактивных атомов:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} \right) \qquad (2)$$

Из (2):

$$t = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln\left(1 - \frac{\Delta N}{N_0} \right) = -\frac{8{,}64 \cdot 10^5\ c}{\ln 2} \ln\left(1 - \frac{1}{10^7} \right) = 0{,}125\ c$$

Ответ: $t = 0{,}125\ c$.

9. Какой изотоп образуется из $_{90}Th^{232}$ после четырех α и двух β-распадов?

Дано:

$_{90}Th^{232}$

четыре α-распада

два β-распада

Найти: $_{Z}X^{A} - ?$

Решение:

Схема α-распада:

$$_{Z}X^{A} \xrightarrow{\alpha-распад} {}_{Z-2}Y^{A-4} + {}_{2}He^{4}$$

где $^{4}_{2}\mathrm{He}$ – α- частица.

Схема β_{-}-распада:

$$_{Z}X^{A} \xrightarrow{\beta_{-}\text{-}распад} {}_{Z+1}Y^{A} + {}_{-1}e^{0}$$

где $^{0}_{-1}e$ – электрон.

Схема четырех α-распадов:

$$_{90}Th^{232} \xrightarrow{4\alpha-распадов} {}_{90-4\cdot 2}X^{232-4\cdot 4} + 4\cdot {}_{2}He^{4}$$

$$\underset{ТОРИЙ}{_{90}Th^{232}} \xrightarrow{4\alpha-распадов} \underset{СВИНЕЦ}{_{82}Pb^{216}} + 4\cdot {}_{2}He^{4}$$

Схема двух β-распадов:

$$_{82}Pb^{216} \xrightarrow{2\beta_{-}\text{-}распадов} {}_{82+2\cdot 1}X^{216} + 2\cdot {}_{-1}e^{0}$$

$$_{82}Pb^{216} \xrightarrow{2\beta_{-}\text{-}распадов} \underset{ПОЛОНИЙ}{_{84}Po^{216}} + 2\cdot {}_{-1}e^{0}$$

Ответ: после четырех α и двух β-распадов из $_{90}Th^{232}$ образуется Изотоп полония $_{84}Po^{216}$.

10. Найдите (в МэВ) энергию связи ядра атома алюминия ${}_{13}\mathrm{Al}^{27}$.

Дано:

${}_{13}\mathrm{Al}^{27}$

Найти: $E_{св} - ?$

Решение:

Дефект массы ядра:

$$\Delta m = Z \cdot m_{{}_1^1\mathrm{H}} + \left(A - Z\right) \cdot m_n - m_a =$$
$$= 13 \cdot 1{,}00783\ а.е.м. + \left(27 - 13\right) \cdot 1{,}00867\ а.е.м. - 26{,}98135\ а.е.м. =$$
$$= 0{,}24182\ а.е.м.$$

где $m_{{}_1^1\mathrm{H}}$ – масса атома ${}_1^1\mathrm{H}$; m_n – масса нейтрона; m_a – масса атома ${}_{13}\mathrm{Al}^{27}$; Z – зарядовое число; A – массовое число.

Энергия связи:

$$E_{св} = 931 \frac{МэВ}{а.е.м.} \cdot 0{,}24182\ а.е.м. = 225{,}13\ МэВ$$

Ответ: $E_{св} = 225{,}13\ МэВ$.

Список использованной литературы

1. Грабовский Р.И. Курс физики / Р.И. Грабовский. – СПб.: Лань, 2009. – 608 с.

2. Детлаф А.А. Курс физики: учебник / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высшая школа, 2002. – 718 с.

3. Дмитриева В.Ф. Основы физики / В.Ф. Дмитриева, В.Л. Прокофьев. – М.: Высшая школа, 2003. – 527 с.

4. Общая физика / коллектив авторов; под ред. А.А. Воробьёва. – М.: КНОРУС, 2016. – 800 с.

5. Яворский Б.М. Основы физики: Колебания и волны. Квантовая физика. Физика ядра и элементарных частиц / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 552 с.