**Тема 2. Численное интегрирование. Метод Гаусса**

По данной теме необходимо освоить метод численного интегрирования. Решить задачу вычисления определенного интеграла вида по формуле Гаусса при конечном числе n отрезков разбиения.

Заданы функция пределы интегрирования x0=0, x1=1, число отрезков разбиения n=5.

Точность квадратурной формулы определяется выбором узлов и весовых коэффициентов. Например, формулы трапеций и Симпсона имеют одинаковые узлы, но различные веса и, как следствие, их точность оказывается разной. Гаусс предложил построить квадратурную формулу с числом узлов , которая является точной для любого полинома степени  или ниже:

Узлы являются корнями полинома Лежандра степени *n* полиномы Лежандра. Они определяются формулами

Выпишем квадратурную формулу с n=5.

Найдём корни уравнения:

Узлы расположены симметрично относительно точки :

Весовые коэффициенты рассчитываются по формуле:

, то есть:

Вычислим интеграл в общем виде:

Воспользуемся вышеприведёнными формулами для вычисления интеграла в программе, написанной в matlab:

function fff = wes( a,b,c,d,e)

% Функция для вычисления весовых коэффициентов

 zn=(e-a)\*(e-b)\*(e-c)\*(e-d); % Знаменатель

 mn=a\*b+a\*c+a\*d+b\*c+b\*d+c\*d; % Коэффициент при x^3

 ms=a\*b\*c\*d; % Коэффициент при x

 fff=2/15\*(3+5\*mn+15\*ms)/zn; % Значение функции

end

Основной скрипт

clc; % очистка экрана

clear all; % очистка workspase

close all; % закрытие всех окон

f=@(x)(log10(1+x)./(1+x.^2)) % интегрируемая функция

a=0; % начало интервала

b=1; % конец интервала

eps=1.0e-06; % требуемая погрешность

x0=a:0.01:b;% Массив x

y=f(x0);% Массив y

plot(x0,y,'LineWidth',2,'Color','b'); % График

grid on;% Сетка

xlabel('x'); % Метка оси x

ylabel('y'); % Метка оси y

legend('f(x)','Location','East');% Легенда

title('График подинтегральной функции'); % Заголовок графика

I=quad(f,a,b,eps); % Вычисление интеграла с помощью встроенной функции quad

fprintf("Значение интеграла с помощью встроенной функции quad %.6f\n",I);

u=sqrt(1120); % Вспомогательное значение

% Вычисляем координаты узлов на отрезке [-1,1]

t(1)=-sqrt((70+u)/126);

t(2)=-sqrt((70-u)/126);

t(3)=0;

t(4)=sqrt((70-u)/126);

t(5)=sqrt((70+u)/126);

disp("Массив t");

disp(t);% Вывод на экран массива координат узлов

% Вычисление массива весов

c(1)=wes(t(2),t(3),t(4),t(5),t(1));

c(2)=wes(t(1),t(3),t(4),t(5),t(2));

c(3)=wes(t(1),t(2),t(4),t(5),t(3));

c(4)=wes(t(1),t(2),t(3),t(5),t(4));

c(5)=wes(t(1),t(2),t(3),t(4),t(5));

disp("Массив с");

disp(c); % Вывод на экран массива весов

for i=1:5

 x(i)=(b-a)/2\*t(i)+(b+a)/2;

end;

% Вывод на экран массива координат узлов на фактическом интервале [a,b]

disp("Массив x");

disp(x);

% Вычисление интеграла

IG=0;

for i=1:5

 IG=IG+c(i)\*f(x(i));

end;

IG=IG\*(b-a)/2;

fprintf("Значение интеграла по методу Гаусса=%.6f\n",IG);

Результаты работы программы:



Значение интеграла с помощью встроенной функции quad 0.118214

Массив t

 -0.9062 -0.5385 0 0.5385 0.9062

Массив с

 0.2369 0.4786 0.5689 0.4786 0.2369

Массив x

 0.0469 0.2308 0.5000 0.7692 0.9531

Значение интеграла по методу Гаусса=0.118214

>>

Таким образом, значение интеграла функции, вычисленное с помощью встроенной функции quad с точностью 1.0e-6, и значение, вычисленное методом Гаусса с пятью узлами, совпадают.