Экспериментальные данные о значениях переменных х и у приведены в таблице.


В результате их выравнивания получена функция 

Используя метод наименьших квадратов , аппроксимировать эти данные линейной зависимостью y=ax+b (найти параметры а и b). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x$$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 |
| $$y$$ | 2,1 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3 |

Выполнить чертеж.

Решение:

Используя метод наименьших квадратов, рассматривают функцию двух переменных

$$F\left(a,b\right)=\sum\_{i=1}^{n}\left(y\_{i}-\left(ax\_{i}+b\right)\right)^{2}$$

и исследуют ее на экстремум (минимум). В результате, минимум функция принимает при следующих значениях параметров:

$$a=\frac{n\sum\_{}^{}x\_{i}y\_{i}-\sum\_{}^{}x\_{i}\sum\_{}^{}y\_{i}}{n\sum\_{}^{}x\_{i}^{2}-\left(\sum\_{}^{}x\_{i}\right)^{2}},$$

$$b=\frac{\sum\_{}^{}y\_{i}-a\sum\_{}^{}x\_{i}}{n}.$$

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | $$x\_{i}$$ | $$y\_{i}$$ | $$x\_{i}^{2}$$ | $$x\_{i}y\_{i}$$ |
|  | 0 | 2,1 | 0 | 0 |
|  | 1 | 2,4 | 1 | 2,4 |
|  | 2 | 2,6 | 4 | 5,2 |
|  | 4 | 2,8 | 16 | 11,2 |
|  | 5 | 3 | 25 | 15 |
| Сумма | 12 | 12,9 | 46 | 33,8 |

$$a=\frac{5∙33,8-12∙12,9}{5∙46-12^{2}}≈0,165,$$

$$b=\frac{12,9-0,165∙12}{5}=2,184.$$

Следовательно, искомая прямая имеет уравнение

$$y=0,165x+2,184.$$

Выясним какая из двух линий $y=0,165x+2,184$ и $y=\sqrt[3]{x+1}+1$лучше выравнивает данные. Для этого рассмотрим квадраты отклонений

$$σ\_{1}=\sum\_{}^{}\left(y\_{i}-\left(ax\_{i}+b\right)\right)^{2}и σ\_{2}=\sum\_{}^{}\left(y\_{i}-φ\left(x\_{i}\right)\right)^{2}.$$

Та из линий будет лучше выравнивать данные, у которой будет наименьшее отклонение.

|  |  |
| --- | --- |
| s1 | s2 |
| 0,007009194 | 0,01 |
| 0,002617631 | 0,019622112 |
| 0,007404002 | 0,024885198 |
| 0,001952407 | 0,00810433 |
| 8,65333E-05 | 0,033444878 |
| 0,019069767 | 0,096056518 |

$$σ\_{1}=0,019,σ\_{2}=0,096.$$

Откуда ясно, что первая линия лучше выравнивает данные.