Лабораторная работа № 5. Перевод чисел из одной позиционной системы счисления в другую

1. Цель работы

Познакомиться правилами перевода чисел из одной позиционной системы счисления в другую.

2. Теоретические сведения

Система счисления – совокупность приемов и правил для записи чисел цифровыми знаками или символами.

Способов записи чисел цифровыми знаками существует бесчисленное множество. Любая предназначенная для практического применения система счисления должна обеспечивать:

- возможность представления любого числа в рассматриваемом диапазоне величин;
- единственность представления (каждой комбинации символов должна соответствовать одна и только одна величина);
- простоту оперирования числами.

Все системы представления чисел делят на позиционные и непозиционные. Самый простой способ записи чисел может быть описан выражением

$$A_D = D_1 + D_2 + \ldots + D_k = \sum_{i=1}^{k} D_i$$

где A_D – запись числа A в системе счисления D.

По этому принципу построены непозиционные системы счисления.

Непозиционная система счисления – система, для которой значение символа не зависит от его положения в числе.

Существует и другой способ построения систем счисления: выбирается некоторое число q – основание системы счисления, и каждое число N представляется в виде комбинации его степеней с коэффициентами, принимающими значения от 0 до $q - 1$, т.е. в виде

$$a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \ldots + a_1 q^1 + a_0 q^0$$

В этой записи значение каждой цифры зависит от того места, которое эта цифра занимает. Например, в числе 222 двойка участвует три раза. Но самая правая из них означает две единицы, вторая справа – два десятка, т. е. двадцать, а третья – две сотни. В данном примере имеется в виду десятичная система. Если бы мы пользовались какой-либо другой системой счисления, скажем с основанием q, то эти три двойки означали бы соответственно величины $2,\ 2q$ и $2q^2$. Системы счисления, построенные, таким образом, называются **позиционными**.

В процессе преобразования информации в ЭВМ возникает необходимость перевода чисел из одной позиционной системы счисления в другую.

Для позиционной системы счисления справедливо равенство

$$A_q = \sum_{i=-m}^{i=n} a_i q^i$$

или

$$A_q = a_n q^n + \ldots + a_1 q^1 + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + \ldots + a_{-m} q^{-m},$$

где A_q - произвольное число, записанное в системе счисления с основанием q;
$n+1$, m – количество целых и дробных разрядов.

На практике используют сокращенную запись чисел:

$$A_q = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_{-1} \ldots a_{-m}$$

Целое число A_q в системе счисления с основанием q записывается в виде:

$$A_q = a_n q^n + \ldots + a_1 q^1 + a_0 q^0$$

Числа в разных системах счисления можно представить следующим образом:

$$A_{q_1} = \sum_{i=-m}^{i=n} a_i q_1^i = \sum_{j=-s}^{j=k} a_j q_2^j = A_{q_2}$$

В общем виде задачу перевода числа из системы счисления с основанием q_1 в систему счисления с основанием q_2 можно представить как задачу определения коэффициентов b_i нового ряда, изображающего число в системе с основанием q_2. Все действия должны выполняться по правилам q_1 - арифметики, т.е. по правилам исходной системы счисления.

Переписав выражение $A_q = a_n q^n + \ldots + a_1 q^1 + a_0 q^0$ по схеме Горнера, получим:

$$A_{q_2} = \left(\ldots\left(\left(b_k q_2 + b_{k-1}\right) \cdot q_2 + \ldots\right) \cdot q_2 + b_1\right) \cdot q_2 + b_0$$

Правую часть полученного выражения разделим на величину основания q_2. В результате определим первый остаток b_0 и целую часть $\left(\ldots\left(\left(b_k q_2 + b_{k-1}\right) \cdot q_2 + \ldots\right) \cdot q_2 + b_1\right)$ Разделив целую часть на q_2, найдем второй остаток b_1. Повторяя процесс деления $k+1$ раз, получим последнее целое частное b_k, которое, по условию, меньше основания системы q_2 и является старшей цифрой числа, представленного в системе с основанием q_2.

Рассмотрим пример: перевести число 1020304 из десятичной системы счисления в семеричную.

Таблица 3 - Перевод числа из одной позиционной системы счисления в другую

Делимое	Делитель		Частное	Остаток
1020304	/	7	145757	5
145757	/	7	20822	3
20822	/	7	2974	4
2974	/	7	424	6
424	/	7	60	4
60	/	7	8	4
8	/	7	1	1
1	/	7	0	1

Ответ: $1020304_{10}=11446435_7$.

В ряде случае при переводе чисел из одной системы счисления в другую используют промежуточную систему счисления. Например, такой подход можно использовать при переводе числа из 17-ричной в троичную систему счисления. Вместо операции деления по правилам 17-ричной арифметики можно сначала перевести это число в десятеричную систему в соответствии с выражением $A_q = a_n \cdot 17^n + \ldots + a_1 \cdot 17^1 + a_0 \cdot 17^0$, а затем число в десятичной системе перевести в троичную, используя деление в десятичной арифметике.

3. Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2. Получить вариант задания у преподавателя.
3. Выполнить задание.
4. Продемонстрировать выполнение работы преподавателю.
5. Оформить отчет.
6. Защитить лабораторную работу.

4. Требования к оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

1. титульный лист;
2. цель работы;
3. задание на лабораторную работу;
4. ход работы;
5. ответы на контрольные вопросы;
6. выводы по проделанной работе.

5. Задание на работу

Перевести число из одной позиционной системы счисления в другую в соответствии с полученным вариантом (таблица 4).

Таблица 4 - Варианты заданий на работу

Вариант	Число	Исходная система счисления	Система счисления	Система счисления	Система счисления
1	1C2	16	12	9	2
2	316	12	2	3	15
3	550	9	3	8	7
4	111000010	2	15	8	18
5	1212	7	3	5	6
6	121200	3	8	13	12

6. Контрольные вопросы

1. Какая система называется позиционной? Приведите примеры таких систем.
2. Какая система называется непозиционной? Приведите примеры таких систем.
3. Правила какой арифметики используются при переводе числа из одной системы счисления в другую делением на основание новой системы?
4. Какое максимально возможное число можно записать с помощью шестнадцатеричной системы счисления?
5. Перечислите цифры, используемые для записи числа в восьмеричной системе.
6. Возможен ли перевод дробных чисел из одной системы счисления в другую? Поясните ответ.

7. Литература

1. Фомин С. В. Системы счисления. 5-е изд. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат, лит., 1987.– 48 с.
2. Савельев А.Я. Основы информатики. – М.: Издательство МГТУ имени Н.Э.Баумана, 2001. – 328 с.