Лабораторная работа №8. Минимизация логических функций методом Квайна – Мак-Класки

1. Цель работы

Изучить метод Квайна – Мак-Класки минимизации логических функций.

2. Теоретические сведения

Метод Квайна – Мак-Класки является одним из формальных методов минимизации логических выражений, реализующий достаточно простой алгоритм решения поставленной задачи. Исходную логическую функцию необходимо представить в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ), которая при расчетах заменяется кубическим комплексом C_0.

Перед началом вычислений производится упорядочение этого комплекса по нормам векторов (весам наборов), при этом 0-кубы разбиваются на классы по количеству единиц в них.

Конечной целью алгоритма является отыскание множества простых импликант, соответствующих минимизируемой функции, из которых затем выбирается некоторое подмножество, полностью покрывающее обязательные единицы исходной функции.

Минимизация логического выражения осуществляется с использованием двух логических операций: склеивания и поглощения. Очевидно, что при группировании кубов в классы по количеству единиц в наборах, склеивание возможно лишь между элементами соседних классов, поэтому такое упорядочение упрощает поиск соответствующих пар элементов.

Все данные и промежуточные результаты заносятся в специальную таблицу, в которой фиксируются промежуточные этапы их обработки.

На первом этапе первого цикла выполняются все возможные склеивания между 0-кубами. Результаты помещаются в продолжение таблицы. Затем производятся все поглощения 0-кубов 1-кубами. Если останутся 0-кубы, не поглощенные в результате второго этапа, им присваивается метка «первичная импликанта». На этом первый цикл склеивания и поглощения заканчивается.

Второй цикл выполняется аналогично, но уже над комплексом C_1, составленным из 1-кубов. Циклы продолжаются до тех пор, пока это возможно.

Как только все циклы склеивания окончены, составляется таблица, строками которой являются первичные импликанты, а столбцами – исходные термы. Если в некоторый минитерм СДНФ входит какая-либо из первичных импликант, то на пересечении соответствующего столбца и строки ставится метка. Для полученной таблицы производится выбор минимального покрытия – такой совокупности первичных импликант, которая включает метки во всех столбцах, по крайней мере, по одной метке в каждом столбце. При нескольких возможных вариантах такого выбора предпочтение отдается варианту покрытия с минимальным суммарным числом букв в импликантах, образующих покрытие.

Пример. Найти минимальную форму для функции $f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \underset{1}{\vee}(0,1,2,3,4,9,10,11,12,13,15)$.

Представим функцию в виде таблицы специального вида, произведя группировку 0-кубов по количеству входящих в них единиц (таблица 7). 0-куб из первого класса склеивается с 0-кубами из первого класса. Данная процедура повторяется для всех элементов из остальных смежных классов.

Таблица 7 - Первичные импликанты C_0

Кубический комплекс	Число единиц	Кубы	Метки
C_0	0	0000	*
	1	0001 0010 0100	* * *
	2	0011 1001 1010 1100	* * * *
	3	1011 1101	* *
	4	1111	*

Затем производится поглощение 0-кубов 1-кубами (таблица 8). Сам процесс аналогичен поглощению 0-кубов.

Таблица 8 - Первичные импликанты C_1

Кубический комплекс	Число единиц	Кубы	Метки
C_1	0	000x 00x0 0x00	* * ПИ
	1	00x1 x001 001x x010 x100	* * * * ПИ
	2	x011 10x1 1x01 101x 110x	* * * * ПИ
	3	1x11 11x1	* *

Аналогичная процедура повторяется для кубического комплекса C_1. в результате поглощений и склеиваний 1-кубов формируется таблица 2-кубов (таблица 9).

Следует обратить внимание на то, что при обработке комплекса C_1 и последующих сравнивать можно лишь те кубы, которые имеют метку x в одном и том же разряде.

Таблица 9 - Первичные импликанты C_2

Кубический комплекс	Число единиц	Кубы	Метки
C_2	0	00xx	ПИ
	1	x0x1 x01x	ПИ ПИ
	2	1xx1	ПИ

В результате выполнения нескольких циклов получается искомая совокупность простых импликант. Для выбора минимально необходимой совокупности строится еще одна таблица (таблица 10).

В данном случае импликанты из второй, четвертой, шестой и седьмой строк обеспечивают минимальное покрытие.

Таблица 10 - Таблица покрытий

	0000 (0)	0001 (1)	0010 (2)	0011 (3)	0100 (4)	1001 (9)	1010 (10)	1011 (11)	1100 (12)	1101 (13)	1111 (15)
0x00	v				v						
x100					v				v		
110x									v	v	
00xx	v	v	v	v							
x0x1		v		v		v		v			
x01x			v	v			v	v			
1xx1						v		v		v	v

Ответ: $f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \vee \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot x_4$.

3. Порядок выполнения работы

- Ознакомиться с теоретическими сведениями.
- Получить вариант задания у преподавателя.
- Выполнить задание.
- Продемонстрировать выполнение работы преподавателю.
- Оформить отчет.
- Защитить лабораторную работу.

4. Требования к оформлению отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

- титульный лист;
- цель работы:
- задание на лабораторную работу;
- ход работы;
- ответы на контрольные вопросы;
- выводы по проделанной работе.

5. Задание на работу

Минимизировать методом Квайна–Мак-Класки логические функции (таблица 11).

Таблица 11 - Варианты заданий на работу

Вариант	*f(a, b, c, d, e)*
1	$\underset{1}{\vee}(0,1,2,8,13,15,16,18,26,31)$
2	$\underset{1}{\vee}(4,6,9,12,14,22,28,30)$
3	$\underset{1}{\vee}(11,21,23,26,27,29,30)$
4	$\underset{1}{\vee}(6,11,14,19,22,27,30)$
5	$\underset{1}{\vee}(9,11,13,18,24,26)$
6	$\underset{1}{\vee}(1,5,7,9,12,14,16,30)$

6. Контрольные вопросы

1. В каком виде должна быть представлена функция для минимизации по методу Квайна–Мак-Класки?
2. Как в методе Квайна–Мак-Класки называются непоглощенные n-кубы?
3. Какова особенность минимизации n-кубов в методе Квайна – Мак-Класки?
4. Для чего в методе Квайна–Мак-Класки строится таблица покрытий?
5. По какому принципу производится выбор подмножества простых импликант?
6. В какой форме представляется результат минимизации по методу Квайна–Мак-Класки?

7. Литература

1. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., стереотип. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.
2. Савельев А.Я. Основы информатики. – М.: Издательство МГТУ имени Н.Э.Баумана, 2001. – 328 с.