Тема: Сбалансированные по высоте деревья поиска (АВЛ)

Цель работы: Изучение процесса программного построения АВЛ-дерева.

1. Постановка задачи

1. Разработать подпрограмму построения АВЛ-дерева для массива целых чисел.

2. Построить АВЛ-дерево из 100, 200,…, 500 вершин (данные в вершинах произвольные, но все различные). Распечатать обход дерева слева направо.

3. Для построенного АВЛ-дерева вычислить размер, контрольную сумму, высоту и среднюю высоту, сравнить их с аналогичными характеристиками ИСДП. ИСДП необходимо строить для той же последовательности данных, что и АВЛ-дерево. Заполнить таблицу и проанализировать полученные результаты.

2. Описание используемых алгоритмов

Дерево поиска называется сбалансированным по высоте, или АВЛ – деревом, если для каждой его вершины высоты левого и правого поддеревьев отличаются не более чем на 1.

Заметим, что ИСДП является также и АВЛ – деревом. Обратное утверждение не верно.

АВЛ-дерево никогда не будет в среднем по высоте превышать ИСДП более, чем на 45% независимо от количества вершин.

log(n+1) ≤ hАВЛ(n) < 1,44 log(n+2) – 0,328 при n→∞.

Таким образом, лучший случай сбалансированного по высоте дерева – ИСДП, худший случай – плохое АВЛ – дерево. Плохое АВЛ – дерево это АВЛ-дерево, которое имеет наименьшее число вершин при фиксированной высоте. Рассмотрим процесс построения плохого АВЛ-дерева. Возьмём фиксированную высоту h и построим АВЛ – дерево с минимальным количеством вершин. Обозначим такое дерево через Th. Ясно, что Т0 – пустое дерево, Т1 – дерево с одной вершиной. Для построения Тh при h > 1 будем брать корень и два поддерева с минимальным количеством вершин.

Одно поддерево должно быть высотой h–1, а другое высотой h–2. Поскольку принцип их построения очень напоминает построение чисел Фибоначчи, то такие деревья называют деревьями Фибоначчи: Th = < Th-1, x, Th-2 >. Число вершин в Th определяется следующим образом:

n0 = 0, n1 = 1, nh = nh-1 + 1 + nh-2

Рассмотрим, что может произойти при включении новой вершины в сбалансированное по высоте дерево. Пусть r – корень АВЛ-дерева, у которого имеется левое поддерево (ТL) и правое поддерево (TR). Если добавление новой вершины в левое поддерево приведет к увеличению его высоты на 1, то возможны три случая:

1) если hL = hR, то ТL и TR станут разной высоты, но баланс не будет нарушен;

2) если hL < hR, то ТL и TR станут равной высоты, т. е. баланс даже улучшится;

3) если hL > hR, то баланс нарушиться и дерево необходимо перестраивать.

Введём в каждую вершину дополнительный параметр Balance (показатель баланса), принимающий следующие значения:

-1, если левое поддерево на единицу выше правого;

0, если высоты обоих поддеревьев одинаковы;

1, если правое поддерево на единицу выше левого.

Если в какой-либо вершине баланс высот нарушается, то необходимо так перестроить имеющееся дерево, чтобы восстановить баланс в каждой вершине. Для восстановления баланса будем использовать процедуры поворотов АВЛ-дерева.

LL - поворот

q := p→Left

q→Balance := 0

p→Balance := 0

p→Left := q→Right

q→Right := p

p := q

LR - поворот

q := p→Left, r := q→Right

IF (r→Balance<0) p→Balance := +1 ELSE p→Balance := 0 FI

IF (r→Balance>0) q→Balance := –1 ELSE q→Balance := 0 FI

r→Balance := 0

p→Left := r→Right, q→Right := r→Left

r→Left := q, r→Right := p, p := r

RR - поворот

q := p→Right

q→Balance := 0

p→Balance := 0

p→ Right:= q→ Left

q→ Left := p

p := q

RL - поворот

q := p→ Right, r := q→ Left

IF (r→Balance>0) p→Balance := -1 ELSE p→Balance := 0 FI

IF (r→Balance<0) q→Balance := 1 ELSE q→Balance := 0 FI

r→Balance := 0

p→ Right:= r→ Left, q→ Left:= r→ Right

r→ Left := p, r→Right := q, p := r

Добавление новой вершины в АВЛ-дерево происходит следующим образом. Вначале добавим новую вершину в дерево так же как в случайное дерево поиска (проход по пути поиска до нужного места). Затем, двигаясь назад по пути поиска от новой вершины к корню дерева, будем искать вершину, в которой нарушился баланс (т. е. высоты левого и правого поддеревьев стали отличаться более чем на 1). Если такая вершина найдена, то изменим структуру дерева для восстановления баланса с помощью процедур поворотов.

3. Результат работы программы

Фрагменты работы программы показаны на рисунках.





Результаты замеров для АВЛ записываются в файл AVL.txt.

Результаты замеров для ИСДП записываются в файл Balanced.txt.

4. Анализ и сравнение полученных результатов с теоретическими оценками

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Размер дерева | АВЛ-дерево | ИСДП |
| Контр. сумма | Теор. оценки для сред. высоты | Средняявысота | Контр. сумма | Теор. оценки для сред. высоты | Средняявысота |
| 100 | 9652 | 8 | 5.04 | 9652 | 7 |  4.80 |
| 200 | 40815 | 11 | 6.29 | 40815 | 8 |  5.76 |
| 300 | 88492 | 11 | 6.63 | 88492 | 9 |  6.33 |
| 400 | 163252 | 11 | 7.03 | 163252 | 9 |  6.75 |
| 500 | 246355 | 12 | 7.35 | 246355 | 9 |  7.00 |

Как видно по результатам замеров на одних и тех же данных АВЛ-дерево имеет несколько больше высоту чем ИСДП.