**Контрольная работа**

**№ 1.** Доказать тождество

$$\left(C\D\right)∪\left(C∩E\right)=C\(D\E).$$

**Решение.**

Наиболее просто доказать тождество по принадлежности. Составим таблицу принадлежностей.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C | D | E | C\D | C∩E | (C\D)⋃(C∩E) | D\E | C\(D\E) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Тождество верное.

**№ 2.** Доказать, что

$$\left(A∩B\right)∪C=A∩\left(B∪C\right), если C⊆A.$$

**Решение.**

Чтобы доказать требуемое, необходимо показать, что

1. $\left(A∩B\right)∪C⊆A∩\left(B∪C\right),$
2. $A∩\left(B∪C\right)⊆\left(A∩B\right)∪C,$ если $C⊆A.$
3. Докажем, что $\left(A∩B\right)∪C⊆A∩\left(B∪C\right)$, если $C⊆A.$

Пусть $x\in \left(A∩B\right)∪C.$ Тогда $x\in A∩B или x\in C.$

Пусть $x\in A∩B.$ Тогда $x\in A$ и $x\in B.$ Но если $x\in B$, то $x\in B∪С$ (здесь C любое). Отсюда следует, что $x\in A∩\left(B∪C\right)$ только тогда, когда $C⊆A.$

Пусть $x\in $C. Тогда $x\in B∪C.$ Отсюда, $x\in A∩\left(B∪C\right)$ только тогда, когда $A=C.$

1. Докажем, что $A∩\left(B∪C\right)⊆\left(A∩B\right)∪C$, если $C⊆A$.

Пусть $x\in A∩\left(B∪C\right)$. Тогда $x\in A и x\in B∪C.$ Отсюда следует, что $x\in B$ или $x\in C.$ Следовательно, если $x\in A$ и $x\in B,$ то $x\in A∩B$ и тогда $x\in \left(A∩B\right)∪C.$ Если $x\in A$ и $x\in C,$ то $x\in \left(A∩B\right)∪C,$ если $C⊆A$.

**№3.** Найти $δ\_{R}, ρ\_{R}, R^{-1}, R○R, R○R^{-1}, R^{-1}○R$ для бинарного отношения

$$R=\left\{x,y\in D, -x\leq 3y\right\}.$$

**Решение.**



Множество точек, заданное отношением *R*, располагается выше линии границы $x+3y=0.$

Имеем

$$δ\_{R}=\left\{∃y:\left(x,y\right)\in R\right\}=D,$$

так как для любого *x* существует такое *y*, что $\left(x,y\right)\in R.$

Аналогично,

$$ρ\_{R}=\left\{∃x:\left(x,y\right)\in R\right\}=D.$$

Находим

$$R^{-1}=\left\{\left(y,x\right)\right|(x,y)\in R\}=\{(x,y)|x,y\in D,-y\leq 3x\}$$

$$R○R=\left\{∃z такое, что \left(x,z\right)\in R и \left(z,y\right)\in R\right\}=$$

$$=\left\{∃z такое, что x,z\in D, -x\leq 3z и z,y\in D, -z\leq 3y\right\}=$$

$=\{(x,y)|x,y\in D, x\leq 9y\}$.

$$R○R^{-1}=\left\{∃z такое, что \left(x,z\right)\in R и \left(z,y\right)\in R^{-1}\right\}=$$

$$=\left\{∃z такое, что x,z\in D, -x\leq 3z и z,y\in D,-y\leq 3z\right\}=$$

$$=\left\{x,y\in D,y\leq x\right\}.$$

$$R^{-1}○R=\left\{∃z такое, что \left(x,z\right)\in R^{-1} и \left(z,y\right)\in R\right\}=$$

$$=\left\{∃z такое, что x,z\in D,-z\leq 3x и z,y\in D, -y\leq 3z\right\}=$$

$$=\left\{x,y\in D, y\leq 9x\right\}.$$

**№ 4.** Доказать, что бинарное отношение $R=\left\{\left(x,y\right)\right|x,y\in D, x^{2}=y^{2}\}$ является отношением эквивалентности, где D ─ множество действительных чисел.

**Решение.**

Пусть произвольное $a\in D,$ тогда, очевидно, $a^{2}=a^{2},$ т.е $\left(a,a\right)\in R$ для любого $a\in D$. Следовательно, бинарное отношение R рефлексивно.

Пусть имеются некоторые $a,b\in D$ такие, что $a^{2}=b^{2}.$ Тогда всегда выполняется равенство $b^{2}=a^{2}.$ Значит, если $\left(a,b\right)\in R, то имеется \left(b,a\right)\in R.$ Следовательно, *R* есть симметричное отношение.

Наконец, пусть имеются некоторые $a, b, c\in D$ такие, что $a^{2}=b^{2} и b^{2}=c^{2}.$ Тогда, очевидно, $a^{2}=c^{2},$ следовательно, если имеются $(a,b)\in R$ и $\left(b,c\right)\in R,$ то всегда имеется $\left(a,c\right)\in R.$ Таким образом, отношение R является транзитивным.

Так как отношение R является рефлексивным, симметричным и транзитивным, то оно является отношением эквивалентности.

**№ 5.** Построить таблицу функции, которая представлена формулой

$$U=(\left(x\rightarrow y∙z\right)⊕\left(x\~y\right))⋁\left(\overbar{y}\rightarrow x∙z\right).$$

**Решение.**

Строим таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | A=$$y∙z$$ | B=$$x\rightarrow A$$ | C=$$x\~y$$ | D=$$B⊕C$$ | E=$$x∙z$$ | F=$$y⋁E$$ | U=$$D⋁F$$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

**№6.** Для функции в задаче №5 построить СДНФ и СКНФ.

**Решение.**

Находим СДНФ (по единичным наборам функции):

$$U=\overbar{x}y\overbar{z}⋁\overbar{x}yz⋁x\overbar{y}z⋁xy\overbar{z}⋁xyz.$$

Находим СКНФ (по нулевым наборам функции):

$$U=(x⋁y⋁z)(x⋁y⋁\overbar{z})(\overbar{x}⋁y⋁z)$$

**№7.** Доказать эквивалентность формул с использованием эквивалентных преобразований

$U=\overbar{\overbar{x}\downright \overbar{y\downright z}}$; $B=\overbar{((x⊕y)\rightarrow y)\downright (x\rightarrow z)}.$

**Решение.**

Учитывая, что $a\downright b=\overbar{a}∙\overbar{b}; a\rightarrow b=\overbar{a}⋁b; a⊕b=\overbar{a}b⋁a\overbar{b},$ а также используя правила поглощения, находим:

$$U=\overbar{\overbar{x}\downright \overbar{y\downright z}}=\overbar{\overbar{x}\downright \overbar{\overbar{y}\overbar{z}}}=\overbar{x\overbar{y}\overbar{z}}=\overbar{x}⋁y⋁z.$$

$$\left(x⊕y\right)\rightarrow y=\left(x\~y\right)⋁y=xy⋁\overbar{x}\overbar{y}⋁y=\overbar{x}⋁y.$$

$$B=\overbar{((x⊕y)\rightarrow y)\downright (x\rightarrow z)}=\overbar{(\overbar{\overbar{x}⋁y})(\overbar{\overbar{x}⋁z})}=\left(\overbar{x}⋁y\right)⋁\left(\overbar{x}⋁z\right)=\overbar{x}⋁y⋁z.$$

Эквивалентность формул доказана.

**№8.** Найти сокращенную ДНФ с помощью карты Карно для функции

$$f\left(\tilde{x}^{4}\right)=\left(1101 0101 1110 1110\right).$$

**Решение.**

Строим карту Карно.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x1x2\x3x4 | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Выделяем простые импликанты:

$$\overbar{x}\_{2}\overbar{x}\_{3}, \overbar{x}\_{1}x\_{4},\overbar{x}\_{3}x\_{4},x\_{1}\overbar{x}\_{4},x\_{1}\overbar{x}\_{3}.$$

В результате получаем сокращенную ДНФ заданной функции:

$$f\left(\tilde{x}^{4}\right)=\overbar{x}\_{2}\overbar{x}\_{3}⋁ \overbar{x}\_{1}x\_{4}⋁\overbar{x}\_{3}x\_{4}⋁x\_{1}\overbar{x}\_{4}⋁x\_{1}\overbar{x}\_{3}.$$

**№9.** В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

**Решение.**

Число способов выбрать для браслета 3 изумруда из 6 равно

$$C\_{6}^{3}=\frac{6!}{3!3!},$$

число способов выбрать для браслета 5 алмазов из 9 равно

$$C\_{9}^{5}=\frac{9!}{5!4!},$$

наконец, число способов выбрать для браслета 2 сапфира из 7 равно

$$C\_{7}^{2}=\frac{7!}{2!5!}.$$

Так как выбор каждого вида камней для браслета производится независимо друг от друга, то число способов выбрать камни для браслета равно

$$C\_{6}^{3}∙C\_{9}^{5}∙C\_{7}^{2}=\frac{6!9!7!}{3!3!5!4!2!5!}.$$

**№10.** В течении 30 дней сентября было 12 дождливых дней, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, а один день был и дождливым, и ветреным, и холодным. В течении скольких дней в сентябре стояла хорошая погода?

**Решение.**

Обозначим *n=30* - число дней сентября, $n\left(p\_{д}\right)=12$ - число дождливых дней сентября, $n\left(p\_{в}\right)=8$ - число ветреных дней сентября, $n\left(p\_{х}\right)=4$ - число холодных дней сентября, $n\left(p\_{дв}\right)=5$ - число дождливых и ветреных дней сентября, $n\left(p\_{дх}\right)=3$ - число дождливых и холодных дней сентября, $n\left(p\_{вх}\right)=0$ - число ветреных и холодных дней сентября, $n\left(p\_{двх}\right)=1$ - число дождливых, ветреных и холодных дней сентября.

Тогда число $n(\overbar{p}\_{д},\overbar{p}\_{в}\overbar{p}\_{х})$ дней сентября, когда стояла хорошая погода, согласно методу включений и исключений равно

$$n\left(\overbar{p}\_{д},\overbar{p}\_{в}\overbar{p}\_{х}\right)=$$

$n-n\left(p\_{д}\right)-n\left(p\_{в}\right)-n\left(p\_{х}\right)+n\left(p\_{дв}\right)+n\left(p\_{дх}\right)+n\left(p\_{вх}\right)-n\left(p\_{двх}\right)$=

$$=30-12-8-4+5+3+0-1=13.$$

**№11.** В книжный магазин поступили романы Ф. Купера «Прерия», «Зверобой», «Шпион», «Пионеры», «Следопыт» по одинаковой цене. Сколькими способами библиотека может закупить 17 книг на выбранный чек?

**Решение.**

Каждому варианту возможной покупки книг поставим в соответствие двоичную последовательность следующем образом. Сначала запишем столько единичек («палочек»), сколько будет закуплено книги первого вида, ставим граничный нуль и записываем столько единиц, сколько закупим книг второго вида и т.д. Если какой-то вид не закупается, просто ставится следующий граничный нуль. Запись последовательности заканчивается постановкой столько единиц, сколько закупается книг последнего вида.

Таким образом, для каждого варианта закупки книг библиотекой будет иметь место двоичная последовательность длины 17+4=21 элементов, содержащая ровно 17 единиц и 4 нуля. Легко видеть, что каждой такой последовательности соответствует вариант покупки книг и обратно. Число всех таких последовательностей равно

$$C\_{21}^{4}=C\_{21}^{17}=\frac{21!}{4!17!}.$$

Это и есть искомое число вариантов закупки книг библиотекой.

**№12.** При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они это могут сделать?

**Решение.**

Предложенная задача состоит в определении числа разбиений множества всех костей домино в количестве 28 штук на равномощные подмножества между 4 игроками. Это число равно

$$\frac{28!}{7!7!7!7!}=\frac{28!}{(7!)^{4}}.$$