7. Теория игр (15 баллов)

6. Найти оптимальные стратеги игроков и цену игры по заданной матрице .

**1. Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку**. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.

Считаем, что игрок I выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок II выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока I.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Игроки | B1 | B2 | B3 | a = min(Ai) |
| A1 | 24 | 0 | 2 | 0 |
| A2 | 0 | 8 | 3 | 0 |
| A3 | 4 | 5 | 6 | 4 |
| b = max(Bi) | 24 | 8 | 6 |   |

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры a = max(ai) = 4, которая указывает на максимальную чистую стратегию A3.

Верхняя цена игры b = min(bj) = 6.

Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как a ≠ b, тогда цена игры находится в пределах 4 ≤ y ≤ 6. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии).

**Проверяем платежную матрицу на доминирующие строки и доминирующие столбцы**.

Иногда на основании простого рассмотрения матрицы игры можно сказать, что некоторые чистые стратегии могут войти в оптимальную смешанную стратегию лишь с нулевой вероятностью.

Говорят, что i-я стратегия 1-го игрока доминирует его k-ю стратегию, если aij ≥ akj для всех j Э N и хотя бы для одного j aij > akj. В этом случае говорят также, что i-я стратегия (или строка) – доминирующая, k-я – доминируемая.

Говорят, что j-я стратегия 2-го игрока доминирует его l-ю стратегию, если для всех j Э M aij ≤ ail и хотя бы для одного i aij < ail. В этом случае j-ю стратегию (столбец) называют доминирующей, l-ю – доминируемой.

В платежной матрице отсутствуют доминирующие строки.

В платежной матрице отсутствуют доминирующие столбцы.

Так как игроки выбирают свои чистые стратегии случайным образом, то выигрыш игрока I будет случайной величиной. В этом случае игрок I должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить **максимальный средний выигрыш**.

Аналогично, игрок II должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать математическое ожидание игрока I.

**Находим решение игры в смешанных стратегиях**.

Запишем систему уравнений.

Для игрока I

24p1+4p3 = y

8p2+5p3 = y

2p1+3p2+6p3 = y

p1+p2+p3 = 1

Для игрока II

24q1+2q3 = y

8q2+3q3 = y

4q1+5q2+6q3 = y

q1+q2+q3 = 1

Решая эти системы матричным методом:

Запишем первую систему

AX = B

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 24 | 0 | 4 | -1 |
| A =  | 0 | 8 | 5 | -1 |
|  | 2 | 3 | 6 | -1 |
|  | 1 | 1 | 1 | 0 |

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 |
| B =  | 0 |
|  | 0 |
|  | 1 |

X = A-1B

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,042 | 0,007 | -0,049 | 0,091 |
| A-1 =  | 0,007 | 0,168 | -0,175 | 0,182 |
|  | -0,049 | -0,175 | 0,224 | 0,727 |
|  | -0,189 | -0,531 | -0,280 | 5,091 |

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0,091 |
| X =  | 0,182 |
|  | 0,727 |
|  | 5,091 |

y = 5,091

p1 = 0,091 (вероятность применения 1-ой стратегии).

p2 = 0,182 (вероятность применения 2-ой стратегии).

p3 = 0,727 (вероятность применения 3-ой стратегии).

Оптимальная смешанная стратегия игрока I: P = (0,091; 0,182; 0,727)

Запишем вторую систему

AX = B

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 24 | 0 | 2 | -1 |
| A =  | 0 | 8 | 3 | -1 |
|  | 4 | 5 | 6 | -1 |
|  | 1 | 1 | 1 | 0 |

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 |
| B =  | 0 |
|  | 0 |
|  | 1 |

X = A-1B

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,042 | 0,007 | -0,049 | 0,189 |
| A-1 =  | 0,007 | 0,168 | -0,175 | 0,531 |
|  | -0,049 | -0,175 | 0,224 | 0,280 |
|  | -0,091 | -0,182 | -0,727 | 5,091 |

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0,189 |
| X =  | 0,531 |
|  | 0,280 |
|  | 5,091 |

q1 = 0,189 (вероятность применения 1-ой стратегии).

q2 = 0,531 (вероятность применения 2-ой стратегии).

q3 = 0,28 (вероятность применения 3-ой стратегии).

Оптимальная смешанная стратегия игрока II: Q = (0,189; 0,531; 0,28)

Цена игры:

y = 5,091