### Задания

1. Изобразите на плоскости ограничения задачи линейного программирования и решите (графически) эту задачу:

*400W1 + 450W2 ⇨ min*

*5W1 + 10W2 ≥ 45*

*20W1 + 15W2 ≥ 80*

*W1 ≥ 0, W2 ≥ 0*

Решение.

Построим область допустимых решений



Построим целевую функцию



Точка минимума:

*5W1 + 10W2 = 45*

*20W1 + 15W2 = 80*

Отсюда

*W1 + 2W2 = 9*

*4W1 + 3W2 = 16*

$$∆=3-8=-5$$

$$∆1=9\*3-16\*2=-5$$

$$∆2=16-4\*9=-20$$

*W1 =1;W2 = 4*

Минимальное значение функции

*400W1 + 450W2 = 400\*1+450\*4=2200*

2. Решите задачу линейного программирования:

*W1 + 5W2 ⇨ max*

*0,1W1 + W2 ≤ 3,8*

*0,25W1 + 0,25W2 ≤ 4,2*

*W1 ≥ 0, W2 ≥ 0*

Решение.

Данную задачу можно решать различными методами, так как переменных две, то наиболее простой вариант –используя графический метод.



Нанесем целевую функцию



Максимальное значение в точке пересечения

*0,1W1 + W2 = 3,8*

*0,25W1 + 0,25W2 = 4,2*

$$∆=0,1\*0,25-0,25=-0,225$$

$$∆1=3,8\*0,25-4,2=-3,25$$

$$∆2=0,1\*4,2-0,25\*3,8=-0,53$$

*W1 =14,44;W2 = 2,36*

Максимальное значение функции

*W1 + 5W2 =14,44+5\*2,36=26,24*

3. Решите задачу целочисленного программирования:

*10X + 5Y ⇨ max*

*8X + 3Y ≤ 40*

*3X +10Y ≤ 30*

*X ≥ 0, Y ≥ 0*

*X* и *Y -* целые числа

Решение.

Решим задачу графически.



Нанесем целевую функцию



Получим решение

*8X + 3Y = 40*

*3X +10Y = 30*

$$∆=8\*10-3\*3=71$$

$$∆1=40\*10-30\*3=310$$

$$∆2=8\*30-3\*40=120$$

$$X=4,37 Y=1,69$$

Решение получили не целочисленное, параллельным переносом найдем целочисленное решение.



Получим целочисленное решение

$$X=2, Y=1$$

$$10\*2+5\*1=25$$

4. Решите задачу о ранце:

*X1 + X2 + 2X3 + 2X4 + X5 + X6 ⇨ max*

*0,5X1 + X2 + 1,5X3 + 2X4 + 2,5X5 + 3X6 ≤ 3*

Управляющие параметры *Xk, k=1,2,3,4,5,6,* принимают значения из множества, содержащего два элемента - 0 и 1.

Решение.

Условная оптимизация.

f6(L) = max(1x6); 0 < x6 < 1; x6 = 0,1.

f6(0) = max[0\*1] = 0

f6(1) = max[0\*1] = 0

f6(2) = max[0\*1] = 0

f6(3) = max[0\*1, 1\*1] = 1

Таблица 1 – Расчет значения функции f1(L)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| L | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f6(L) | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x6 | 0 | 0 | 0 | 1 |

f5(L) = max[1x5 + f6(L - 2.5x5)]; 0 < x5 < 1; x5 = 0,1.

f5(0) = max[0\*1+0] = 0

f5(1) = max[0\*1+0] = 0

f5(2) = max[0\*1+0] = 0

f5(3) = max[0\*1+1, 1\*1+0] = 1

Таблица 2 – Расчет значения функции f2(L)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| L | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f5(L) | 0 | 0 | 0 | 1 |
| x5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

f4(L) = max[2x4 + f5(L - 2x4)]; 0 < x4 < 1; x4 = 0,1.

f4(0) = max[0\*2+0] = 0

f4(1) = max[0\*2+0] = 0

f4(2) = max[0\*2+0, 1\*2+0] = 2

f4(3) = max[0\*2+1, 1\*2+0] = 2

Таблица 3 – Расчет значения функции f3(L)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| L | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f4(L) | 0 | 0 | 2 | 2 |
| x4 | 0 | 0 | 1 | 1 |

f3(L) = max[2x3 + f4(L - 1.5x3)]; 0 < x3 < 1; x3 = 0,1.

f3(0) = max[0\*2+0] = 0

f3(1) = max[0\*2+0] = 0

f3(2) = max[0\*2+2, 1\*2+0] = 2

f3(3) = max[0\*2+2, 1\*2+0] = 2

Таблица 4 – Расчет значения функции f4(L)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| L | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f3(L) | 0 | 0 | 2 | 2 |
| x3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

f2(L) = max[1x2 + f3(L - 1x2)]; 0 < x2 < 1; x2 = 0,1.

f2(0) = max[0\*1+0] = 0

f2(1) = max[0\*1+0, 1\*1+0] = 1

f2(2) = max[0\*1+2, 1\*1+0] = 2

f2(3) = max[0\*1+2, 1\*1+2] = 3

Таблица 5 – Расчет значения функции f5(L)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| L | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f2(L) | 0 | 1 | 2 | 3 |
| x2 | 0 | 1 | 0 | 1 |

f1(L) = max[1x1 + f2(L - 0.5x1)]; 0 < x1 < 1; x1 = 0,1.

f1(0) = max[0\*1+0] = 0

f1(1) = max[0\*1+1, 1\*1+0] = 1

f1(2) = max[0\*1+2, 1\*1+1] = 2

f1(3) = max[0\*1+3, 1\*1+2] = 3

Таблица 6 – Расчет значения функции f6(L)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| L | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f1(L) | 0 | 1 | 2 | 3 |
| x1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Безусловная оптимизация.

Таким образом, максимальный вес рюкзака f1(3) равна 3 кг.

При этом x1 = 0, так как f1(3) = 3 достигается при х1=0 (см. таблицу 6).

Предметы остальных типов распределяются следующим образом:

L = 3 - 0.5 \* 0 = 3

f2(3) = 3 достигается при х2 = 1 (см. таблицу 5).

L = 3 - 1 \* 1 = 2

f3(2) = 2 достигается при х3 = 0 (см. таблицу 4).

L = 2 - 1.5 \* 0 = 2

f4(2) = 2 достигается при х4 = 1 (см. таблицу 3).

L = 2 - 2 \* 1 = 0

f5(0) = 0 достигается при х5 = 0 (см. таблицу 2).

L = 0 - 2.5 \* 0 = 0

f6(0) = 0 достигается при х6 = 0 (см. таблицу 1).

L = 0 - 3 \* 0 = 0

В итоге наилучший вариант загрузки рюкзака достигается при значениях: x1 = 0, x2 = 1, x3 = 0, x4 = 1, x5 = 0, x6 = 0

5. Транспортная сеть (с указанием расстояний) приведена на [рис. 8.9](http://www.intuit.ru/department/itmngt/theorymmd/class/free/8/5.html#image.8.9). Найдите кратчайший путь из пункта 1 в пункт 4.



**Рис. 8.9.** Исходные данные к задаче о кратчайшем пути

Решение.

Проанализируем возможные варианты

(1 – 2) = 5

(1 – 3) = 0

(1 – 3) + (1 – 4) = 0

Кратчайший путь – 0.

6. Как послать максимальное количество грузов из начального пункта 1 в конечный пункт 8, если пропускная способность путей между пунктами транспортной сети ([рис. 8.10](http://www.intuit.ru/department/itmngt/theorymmd/class/free/8/5.html#image.8.10)) ограничена ([табл. 8.7](http://www.intuit.ru/department/itmngt/theorymmd/class/free/8/5.html#table.8.7))?



**Рис. 8.10.** Транспортная сеть к задаче о максимальном потоке

**Таблица 8.7**

**Исходные данные к задаче о максимальном потоке**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Пункт отправления** | **Пункт назначения** | **Пропускная способность** |
| 1 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 2 |
| 1 | 4 | 3 |
| 2 | 5 | 2 |
| 3 | 2 | 2 |
| 3 | 4 | 2 |
| 3 | 6 | 1 |
| 4 | 7 | 4 |
| 5 | 8 | 3 |
| 6 | 5 | 2 |
| 6 | 7 | 1 |
| 6 | 8 | 1 |
| 7 | 8 | 3 |

Решение.

Максимальная пропускная способность составит 1+2+3 = 6 единиц, так как из первого пункта возможно отправить только 6 единиц.

Далее из пункта 4 все грузы (3) могут быть отправлены в пункт 7. Из пункта 3 один груз отправляем в пункт 6 и далее в пункт 8.

Один груз из пункта 3 в пункт 4, оттуда в пункт 7.

И остается один груз – из пункта 2 в пункт 5 и далее в пункт 8.

Грузы, собранные в пункте 7 – 4 штуки – отправляем в пункт 8.

Итак, максимальная пропускная способность рассматриваемой транспортной системы - 6 единиц груза. При этом не используются внутренние участки (ветки) между пунктами 3 и 2, 6 и 7. Большая часть веток не догружена.

7. Решите задачу коммивояжера для четырех городов (маршрут должен быть замкнутым и не содержать повторных посещений). Затраты на проезд приведены в [табл. 8.8.](http://www.intuit.ru/department/itmngt/theorymmd/class/free/8/5.html#table.8.8)

**Таблица 8.8**

**Исходные данные к задаче коммивояжера**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Город отправления** | **Город назначения** | **Затраты на проезд** |
| А | Б | 2 |
| А | В | 1 |
| А | Д | 5 |
| Б | А | 3 |
| Б | В | 2 |
| Б | Д | 1 |
| В | А | 4 |
| В | Б | 1 |
| В | Д | 2 |
| Д | Ф | 5 |
| Д | Б | 3 |
| Д | В | 3 |

Введем обозначение: С(Т) - длина кратчайшего пути из вершины 1 в вершину Т. (Поскольку любой путь, который надо рассмотреть, состоит из дуг, а дуг конечное число, и каждая входит не более одного раза, то претендентов на кратчайший путь конечное число, и минимум из конечного числа элементов всегда достигается.) Рассматриваемая задача состоит в вычислении С(Ф) и указании пути, на котором этот минимум достигается.

В вершину Ф входит только один путь из вершины Д.

То есть кратчайший пусть С(Д) + 5.

Найдем кратчайший путь в вершину Д.

Возможные варианты

С(Д)=min (С(А) + 5; С(Б) + 1; С(В) + 2)

Проанализируем пути

С(А) = min (C(Б) + 3; С(В) + 4)

С(Б) = min (С(А) + 2; С(В) + 1)

С(В) = min (C(A) + 1; C(Б) + 2)

Итак, путь

А – В – Б – Д – Ф

Длина пути составит 1+1+1+1+5=9