1. Вычислить определитель.

а) разложив по элементам 4-й строки;

$$Δ=\left|\begin{matrix}3&5&3&2\\2&4&10&0\\6&-2&2&1\\5&1&2&4\end{matrix}\right|=-3\left|\begin{matrix}5&3&2\\4&10&0\\-2&2&1\end{matrix}\right|+5\left|\begin{matrix}3&3&2\\2&10&0\\6&2&1\end{matrix}\right|-3\left|\begin{matrix}3&5&2\\2&4&0\\6&-2&1\end{matrix}\right|+2\left|\begin{matrix}3&5&3\\2&4&10\\6&-2&2\end{matrix}\right|=-3∙94+5∙\left(-88\right)-3∙\left(-54\right)+2∙280=670$$

б) получив нули во II столбце;

$$Δ=\left|\begin{matrix}3&5&3&2\\2&4&10&0\\6&-2&2&1\\5&1&2&4\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}3&-1&-12&2\\2&0&0&0\\6&-14&-28&1\\5&-9&-23&4\end{matrix}\right|=-2\left|\begin{matrix}-1&-12&2\\-14&-28&1\\-9&-23&4\end{matrix}\right|=-2\left(-1\left|\begin{matrix}-28&1\\-23&4\end{matrix}\right|+12\left|\begin{matrix}-14&1\\-9&4\end{matrix}\right|+2\left|\begin{matrix}-14&-28\\-9&-23\end{matrix}\right|\right)=670$$

2. Найти квадрат матрицы A.

$$A=\left(\begin{matrix}1&1\\-1&-1\end{matrix}\right)$$

$$A^{2}=\left(\begin{matrix}1&1\\-1&-1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&1\\-1&-1\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1∙1+1∙\left(-1\right)&1∙1+1∙\left(-1\right)\\\left(-1\right)∙1-1∙\left(-1\right)&\left(-1\right)∙1-1∙\left(-1\right)\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right)$$

3. Даны вершины пирамиды ABCD, A(4;-4;0), B(-5;3;2), C(8;0;1), D(2;2;3). Найти объём.

$\vec{AB}$=(-9;7;2), $\vec{AC}$=(4;4;1), $\vec{AD}$=(-2;6;3)

$$\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}=\left|\begin{matrix}-9&7&2\\4&4&1\\-2&6&3\end{matrix}\right|=-9\left|\begin{matrix}4&1\\6&3\end{matrix}\right|-7\left|\begin{matrix}4&1\\-2&3\end{matrix}\right|+2\left|\begin{matrix}4&4\\-2&6\end{matrix}\right|=-9∙6-7∙14+2∙32=-88$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}\right|=\frac{44}{3}$$

4. Даны вектора **a**1, **a**2, **a**3. Исследовать на линейную зависимость эти вектора. Записать разложение вектора **b** в базисе {**a**1, **a**2, **a**3}

$\vec{a}\_{1}$=(2;3;3); $\vec{a}\_{2}$=(-1;4;-2); $\vec{a}\_{3}$=(-1;-2;4); $\vec{b}$=(4;11;11)

$$\left|\begin{matrix}2&3&3\\-1&4&-2\\-1&-2&4\end{matrix}\right|=2\left|\begin{matrix}4&-2\\-2&4\end{matrix}\right|-3\left|\begin{matrix}-1&-2\\-1&4\end{matrix}\right|+3\left|\begin{matrix}-1&4\\-1&-2\end{matrix}\right|=60\ne 0⇒система линейно-независима$$

**b**=x**a1**+y**a2**+z**a3=**x(2;3;3)+y(-1;4;-2)+z(-1;-2;4)=(2x-y-z;3x+4y-2z;3x-2y+4z)=(4;11;11)

$$\left\{\begin{matrix}2x-y-z=4\\3x+4y-2z=11\\3x-2y+4z=11\end{matrix}\right.$$

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | z | b |  | ⇒ | x | y | z | b |  | ⇒ | x | y | z | b | $$⇒\left\{\begin{matrix}20x=60\\9x+6y=33\\3x-2y+4z=11\end{matrix}\right.⇒\left\{\begin{matrix}x=3\\y=1\\z=1\end{matrix}\right.⇒\vec{b}=3\vec{a}\_{1}+\vec{a}\_{2}+\vec{a}\_{3}$$ |
| 2 | -1 | -1 | 4 | 4I+III | 11 | -6 | 0 | 27 | I+II | 20 | 0 | 0 | 60 |
| 3 | 4 | -2 | 11 | 2II+III | 9 | 6 | 0 | 33 |  | 9 | 6 | 0 | 33 |
| 3 | -2 | 4 | 11 |  | 3 | -2 | 4 | 11 |  | 3 | -2 | 4 | 11 |

5. Методом Гаусса решить СЛАУ.

$$\left\{\begin{matrix}3x\_{2}-2x\_{3}+5x\_{4}=-7\\x\_{1}-x\_{2}+x\_{3}-2x\_{4}=4\\2x\_{1}+x\_{2}+x\_{4}=1\\3x\_{1}-x\_{2}-2x\_{3}+3x\_{4}=0\end{matrix}\right.$$

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | x2 | x3 | x4 | b |  | ⇒ | x1 | x2 | x3 | x4 | b |  | ⇒ | x1 | x2 | x3 | x4 | b |  | ⇒ | x1 | x2 | x3 | x4 | b |  | ⇒ | x1 | x2 | x3 | x4 | b |  | ⇒ |
| 0 | 3 | -2 | 5 | -7 | I-5III | -10 | -2 | -2 | 0 | -12 | I+III | -7 | 2 | 0 | 0 | -9 | I+II | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | -1 | 1 | -2 | 4 | II+2III | 5 | 1 | 1 | 0 | 6 | 2I-II | 7 | -2 | 0 | 0 | 9 |  | 7 | -2 | 0 | 0 | 9 |  | 7 | -2 | 0 | 0 | 9 | II+2III:3 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 3III-IV | 3 | 4 | 2 | 0 | 3 |  | 3 | 4 | 2 | 0 | 3 |  | 3 | 4 | 2 | 0 | 3 | III+IV | 6 | 3 | 0 | 0 | 3 | III:3 |
| 3 | -1 | -2 | 3 | 0 |  | 3 | -1 | -2 | 3 | 0 |  | 3 | -1 | -2 | 3 | 0 |  | 3 | -1 | -2 | 3 | 0 |  | 3 | -1 | -2 | 3 | 0 |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ⇒ | x1 | x2 | x3 | x4 | b | $$⇒\left\{\begin{matrix}11x\_{1}=11\\6x\_{1}+3x\_{2}=3\\3x\_{1}-x\_{2}-2x\_{3}+3x\_{4}=0\end{matrix}\right.⇒\left\{\begin{matrix}x\_{1}=1\\x\_{2}=-1\\x\_{3}=2+\frac{3}{2}x\_{4}\end{matrix}\right.$$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 11 |
| 6 | 3 | 0 | 0 | 3 |
| 3 | -1 | -2 | 3 | 0 |

6. Исследовать на существование нетривиального решения. Найти ФСР.

$$\left\{\begin{matrix}5x\_{1}-2x\_{2}+9x\_{3}-4x\_{4}-x\_{5}=0\\x\_{1}+4x\_{2}+2x\_{3}+2x\_{4}-5x\_{5}=0\\6x\_{1}+2x\_{2}+2x\_{3}+2x\_{4}-5x\_{5}=0\end{matrix}\right.$$

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | b | ⇒ | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | b | ⇒ | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | b | $$⇒\left\{\begin{matrix}x\_{1}+\frac{20}{11}x\_{3}-\frac{6}{11}x\_{4}-\frac{7}{11}x\_{5}=0\\x\_{2}+\frac{1}{22}x\_{3}+\frac{7}{11}x\_{4}-\frac{12}{11}x\_{5}=0\end{matrix}\right.$$ |
| 5 | -2 | 9 | -4 | -1 | 0 | 1 | -2/5 | 9/5 | -4/5 | -1/5 | 0 | 1 | 0 | 20/11 | -6/11 | -7/11 | 0 |
| 1 | 4 | 2 | 2 | -5 | 0 | 0 | 22/5 | 1/5 | 14/5 | -24/5 | 0 | 0 | 1 | 1/22 | 7/11 | -12/11 | 0 |
| 6 | 2 | 11 | -2 | -6 | 0 | 0 | 22/5 | 1/5 | 14/5 | -24/5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

(7;0;11;11;11), (0;-4;22;11;11) – ФСР

7) Решить AX=B уравнение методом обратной матрицы;

$$A=\left(\begin{matrix}3&-4&0\\1&7&-2\\5&-1&5\end{matrix}\right);B=\left(\begin{matrix}-5\\15\\3\end{matrix}\right)$$

$$Δ=\left|\begin{matrix}3&-4&0\\1&7&-2\\5&-1&5\end{matrix}\right|=3\left|\begin{matrix}7&-2\\-1&5\end{matrix}\right|+4\left|\begin{matrix}1&-2\\5&5\end{matrix}\right|+0\left|\begin{matrix}1&7\\5&-1\end{matrix}\right|=159$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| A11=$\left|\begin{matrix}7&-2\\-1&5\end{matrix}\right|=$33 | A12=$-\left|\begin{matrix}1&-2\\5&5\end{matrix}\right|=$-15 | A13=$\left|\begin{matrix}1&7\\5&-1\end{matrix}\right|=$-36 |
| A21=$-\left|\begin{matrix}-4&0\\-1&5\end{matrix}\right|=$20 | A22=$\left|\begin{matrix}3&0\\5&5\end{matrix}\right|=$15 | A23=$-\left|\begin{matrix}3&-4\\5&-1\end{matrix}\right|=$-17 |
| A31=$\left|\begin{matrix}-4&0\\7&-2\end{matrix}\right|=$8 | A32=$-\left|\begin{matrix}3&0\\1&-2\end{matrix}\right|=$6 | A33=$\left|\begin{matrix}3&-4\\1&7\end{matrix}\right|=$25 |

$$\tilde{A}=\left(\begin{matrix}33&-15&-36\\20&15&-17\\8&6&25\end{matrix}\right);A^{-1}=\frac{1}{Δ}\tilde{A}^{T}=\frac{1}{159}\left(\begin{matrix}33&20&8\\-15&15&6\\-36&-17&25\end{matrix}\right)$$

$$AX=B⇒X=A^{-1}B=\frac{1}{159}\left(\begin{matrix}33&20&8\\-15&15&6\\-36&-17&25\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}-5\\15\\3\end{matrix}\right)=\frac{1}{159}\left(\begin{matrix}33∙\left(-5\right)+20∙15+8∙3\\-15∙\left(-5\right)+15∙15+6∙3\\-36∙\left(-5\right)-17∙15+25∙3\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix}\right)$$

8) Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку A; определить координаты нормали к этой плоскости.

$$L:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{3};A\left(4;5;1\right)$$

B(1;2;-2) – точка проходящая через L;

$\vec{AB}$=(3;3;3)

$\left|\begin{matrix}x-4&y-5&z-1\\1&2&-2\\1&1&1\end{matrix}\right|=\left(x-4\right)\left|\begin{matrix}2&-2\\1&1\end{matrix}\right|-\left(y-5\right)\left|\begin{matrix}1&-2\\1&1\end{matrix}\right|+\left(z-1\right)\left|\begin{matrix}1&2\\1&1\end{matrix}\right|=$4(x-4)-3(y-5)-1(z-1)=4x-3y-z=0 – уравнение плоскости;

(4;-3;-1) – нормаль плоскости;

Дискретная математика.

1. Доказать тождество.

A\(B\C)=(A\B)∪(A∩C)

|  |  |
| --- | --- |
| ∀x∈A\(B\C)⇒(x∈A)∧(x∉(B\C))⇒(x∈A)∧((x∉B)∨(x∈C))⇒x∈(A\B)∪(A∩C)⇒A\(B\C)=(A\B)∪(A∩C) | ⇒A\(B\C)=(A\B)∪(A∩C) |
| ∀x∈(A\B)∪(A∩C)⇒(x∈A\B)∨(x∈(A∩C))⇒((x∈A)∧(x∉B))∨((x∈A)∧(x∈C))⇒x∈(A\B)∪(A∩C)⇒A\(B\C)=(A\B)∪(A∩C) |

2. Доказать методом матиндукции.

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)…\left(1-\frac{1}{n^{2}}\right)=\frac{n+1}{2n};n\geq 2$$

$$1) n=2⇒1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-верно$$

$$2) n=k⇒\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)…\left(1-\frac{1}{k^{2}}\right)=\frac{k+1}{2k}-верное равенство$$

$$3) n=k+1⇒\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)…\left(1-\frac{1}{k^{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\left(k+1\right)^{2}}\right)=\frac{k+2}{2\left(k+1\right)}$$

$$\frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{\left(k+1\right)^{2}}\right)=\frac{k+2}{2\left(k+1\right)}$$

$$\frac{k+1}{2k}\frac{k\left(k+2\right)}{\left(k+1\right)^{2}}=\frac{k+2}{2\left(k+1\right)}$$

$$\frac{k+2}{2\left(k+1\right)}=\frac{k+2}{2\left(k+1\right)}⇒верно$$

3. Для взвешенного орграфа, заданного списком рёбер найти кратчайший путь между вершинами 1 и 9 алгоритмом Дейкстры.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| налало | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 8 | 10 | 10 | 5 |
| конец | 2 | 5 | 3 | 6 | 4 | 7 | 8 | 6 | 9 | 7 | 9 | 4 | 8 | 10 | 10 | 9 | 5 | 10 |
| вес | 7 | 10 | 14 | 9 | 15 | 18 | 21 | 8 | 41 | 11 | 44 | 5 | 15 | 16 | 17 | 5 | 50 | 10 |

U1=0;

U2=U1+d12=7

U3=U2+d23=7+14=21

U4=min{U3+d34;U7+d74}=min{36;32}=32

U5=min{U1+d15;U10+d10,5}=min{10;70}=10

U6=min{U2+d26;U5+d56}=min{16;18}=16

U7=min{U3+d37;U6+d67}=min{39;27}=27

U8=min{U4+d48;U7+d78}=min{53;42}=42

U9=min{U5+d59;U10+d10,9}=min{51;48}=48 – наименьшее расстояние от 1 до 9

U10=min{U5+d10,5;U7+d7,10;U8+d8,10}=min{60;43;59}=43

1-2-6-7-10-9 – кратчайший путь от 1 до 9

4. Владимир, Роман, Сергей, Андрей участвовали в математической олимпиаде и заняли первые четыре призовых места. На вопрос о распределении мет на олимпиаде среди призовой четвёрки были получены ответы:

а) Роман занял третье место или Сергей второе;

б) Андрей занял первое или Роман второе;

в) Сергей занял четвёртое или Владимир третье;

г) Андрей занял второе место или Владимир второе;

В каждом ответе только один вариант верен. Кто какое место занял?

Ri={Роман занял ­i – место}; Si={Сергей занял ­i – место}; Ai={Андрей занял ­i – место}; Vi={Владимир занял ­i – место};

F=(R3⊕S2)(A1⊕R2)(S4⊕V3)(A2⊕V2)(ΣRi=1)(ΣAi=1)(ΣSi=1)(ΣVi=1)(R1+A1+S1+V1=1)(R2+A2+S2+V2=1)(R3+A3+S3+V3=1)(R4+A4+S4+V4=1) – пропозициональная форма

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| R1 | R2 | R3 | R4 | A1 | A2 | A3 | A4 | S1 | S2 | S3 | S4 | V1 | V2 | V3 | V4 | R3⊕S2 | A1⊕R2 | S4⊕V3 | A2⊕V2 | F |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Первое место – Андрей; Второе место – Владимир; Третье место – Роман; Четвёртое место – Сергей;

5. Доказать.

(x→z)(y→z)=(x∨y)→z

$$\left(\overbar{x}∨z\right)\left(\overbar{y}∨z\right)=\overbar{x}\overbar{y}∨\overbar{x}z∨\overbar{y}z∨z=\overbar{x}\overbar{y}∨z\left(\overbar{x}∨\overbar{y}∨1\right)=\overbar{x∨y}∨z=\left(x∨y\right)\rightarrow z$$

6. Найти ДНФ, КНФ.

f=(x∨y)→z

f=$\overbar{x∨y}∨z=\overbar{x}\overbar{y}∨z-ДНФ$

$$f=̿=\overbar{\left(x∨y\right)\overbar{z}}=\overbar{x\overbar{z}∨y\overbar{z}}=\left(\overbar{x}∨z\right)\left(\overbar{y}∨z\right)-КНФ$$