Вариант 47

1. Цена на продукцию монополии-производителя устанавливается в соответствии с соотношением, идентифицируемым как $p=p\_{0}∙(1-0,2∙\sqrt{x})$.

При каком значении выпуска продукции доход от ее реализации будет наибольшим?

Решение

Функция дохода от реализации продукции монополиста примет вид:

$$TR=px=p\_{0}∙\left(1-0,2∙\sqrt{x}\right)∙x=p\_{0}x-0,2p\_{0}x^{{3}/{2}}$$

Найдем частную производную функции дохода по объему:

$$TR^{'}\_{p}=-0,2∙x^{{3}/{2}}+x$$

Приравняем ее к нулю и получим:

$$-0,2∙x^{{3}/{2}}+x=0$$

$$x\left(-0,2∙x^{{1}/{2}}+1\right)=0; -0,2∙x^{{1}/{2}}+1=0; x=25$$

Таким образом, при объеме выпуска 25 ед. монополия получит наибольший доход.

2. Дана матрица прямых затрат $A=(\begin{matrix}0,1&0,5\\0,3&0,2\end{matrix})$.

Найти: а) вектор валовой продукции X для обеспечения выпуска конечной продукции $Y=(\begin{matrix}400\\500\end{matrix})$; б) приращение вектора ∆𝑋 для увеличения выпуска конечной продукции на $∆Y=(\begin{matrix}100\\50\end{matrix})$.

Решение

Найдем матрицу полных производственных затрат:

$$B=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,57}\left(\begin{matrix}0,8&0,5\\0,3&0,9\end{matrix}\right)=(\begin{matrix}1,40&0,88\\0,53&1,58\end{matrix})$$

Тогда вектор валовой продукции Х:

$$X=(E-A)^{-1}Y^{T}=\left(\begin{matrix}1,40&0,88\\0,53&1,58\end{matrix}\right)∙\left(500 400\right)=(\begin{matrix}1000\\1002\end{matrix})$$

Чтобы обеспечить выпуск на внешнее потребление 400 ед. продукции 1-й и 500 ед. продукции 2-й отрасли, первая отрасль должна произвести 1000 ед., а вторая 1002 ед. продукции.

б) Найдем вектор приращения объемов производства:

$$X^{'}=(E-A)^{-1}∆Y=\left(\begin{matrix}1,40&0,88\\0,53&1,58\end{matrix}\right)∙(\begin{matrix}100\\50\end{matrix})=(\begin{matrix}184\\132\end{matrix})$$

Валовая продукция 1-й отрасли должна быть увеличена ни 184 ед., а 2-й – на 132 ед.

3. Идентифицированы функция издержек 𝐶(𝑥), а также функция количества реализованного товара 𝐾(𝑝,𝑥) при установленной цене его единицы, равной 𝑝 (𝑝>𝑝0). Найти оптимальные значения x и p для монополиста-производителя.

$$C\left(x\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}∙x+\frac{1}{12}∙x^{3}; K\left(x;p\right)=\frac{x}{1+(p-p\_{0})^{2}}$$

Решение

Функция прибыли имеет вид:

$$П\left(p,x\right)=pK\left(p,x\right)-C\left(x\right)$$

Подставим данные и получим:

$$П\left(p,x\right)=\frac{px}{1+(p-p\_{0})^{2}}-(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}∙x+\frac{1}{12}∙x^{3})$$

Найдем частные производные функции прибыли и приравняем их к нулю:

$$\left\{\begin{array}{c}П\_{x}^{'}=\frac{p}{1+(p-p\_{0})^{2}}-\frac{1}{2}-\frac{x^{2}}{4}=0\\П\_{y}^{'}=\frac{x(1+\left(p-p\_{0})^{2}\right)-px∙2(p-p\_{0})}{(1+\left(p-p\_{0})^{2}\right)^{2}}=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{p}{1+(p-p\_{0})^{2}}-\frac{1}{2}-\frac{x^{2}}{4}=0\\\frac{x+p\_{0}^{2}x-p^{2}x}{(1+\left(p-p\_{0})^{2}\right)^{2}}=0\end{array}\rightarrow \right.\left\{\begin{array}{c}\frac{p}{1+(p-p\_{0})^{2}}-\frac{1}{2}-\frac{x^{2}}{4}=0\\x(1+p\_{0}^{2}-p^{2})=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{c}x=0\rightarrow \frac{p}{1+(p-p\_{0})^{2}}-\frac{1}{2}=0 \rightarrow p=p\_{0}+1\pm \sqrt{2p\_{0}}\\p=\sqrt{1+p\_{0}^{2}} \rightarrow \frac{\sqrt{1+p\_{0}^{2}}}{1+(\sqrt{1+p\_{0}^{2}}-p\_{0})^{2}}-\frac{1}{2}-\frac{x^{2}}{4}=0\rightarrow x=2\sqrt{\frac{\sqrt{1+p\_{0}^{2}}}{1+(\sqrt{1+p\_{0}^{2}}-p\_{0})^{2}}-\frac{1}{2}}\end{array}\right.$$

$$p=\sqrt{1+p\_{0}^{2}}$$

$$2\sqrt{\frac{\sqrt{1+p\_{0}^{2}}}{1+(\sqrt{1+p\_{0}^{2}}-p\_{0})^{2}}-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{\left(p\_{0}+1\right)\sqrt{1+p\_{0}^{2}}-1-p\_{0}^{2}}{1+p\_{0}^{2}-p\_{0}\sqrt{1+p\_{0}^{2}}}}$$

Ищем ее точку максимума:

$$П\_{x}^{'}=(7x-10-\frac{1}{3}x^{{3}/{2}})^{'}=7-\frac{1}{3}∙\frac{3}{2}\sqrt{x}=7-\frac{1}{2}\sqrt{x}=0$$

$$\sqrt{x}=14 x=196$$

Единственное решение – х=196. Проверим, будет ли она точкой максимума прибыли:

$$П\_{0}^{'}=7-0=7>0$$

$$П\_{225}^{'}=7-\frac{1}{2}\sqrt{225}=7-\frac{15}{2}=-\frac{1}{2}<0$$

Итак, действительно х=196 – точка максимума.

4. Найти функцию спроса 𝑦=𝑦(𝑝), если эластичность 𝐸𝑝 постоянна и задана цена p при некотором значении спроса y:

а) 𝐸𝑝=$-\frac{1}{2}, p=5 при y=2;$

а) 𝐸𝑝=$-3, p=2 при y=27.$

Решение

Эластичность спроса по цене - это производная функции спроса по цене. Поскольку по условию эластичность постоянна, то зависимость спроса от цены - линейная.

а) Напишем уравнение:

$$y\left(p\right)=k\_{1}p+k\_{2}$$

$$Ep=\frac{Dy(p)}{Dp}=k\_{1}$$

то есть: $Ep=k\_{1}=-\frac{1}{2}$

$$y\left(p\right)=-\frac{1}{2}p+k\_{2}$$

При $p=5 и y=2$:

$$2=-\frac{1}{2}∙5+k\_{2} k\_{2}=4,5$$

Функция спроса будет иметь вид:

$$y\left(p\right)=-\frac{1}{2}p+4,5$$

б) Проведем аналогичные п. а) расчеты:

$$Ep=k\_{1}=-3$$

Подставим значения y и р:

$$27=-3∙2+k\_{2} k\_{2}=33$$

Функция спроса:

$$y\left(p\right)=-3p+33$$

5. В страховую компанию в среднем поступает 2 иска в час. Определите вероятность того, что в течение 1,5 часов не поступит ни одного иска. Найти наивероятнейшее число поступивших за час исков и соответствующую этому вероятность.

Решение

Вероятность того, что в течение 1,5 часов не поступит ни одного иска, определим следующим образом:

$$P\_{s}\left(m\right)=\frac{λ^{m}}{m!}e^{-λ}$$

где $λ=λ\_{1}s$

По условию среднее число исков составляет $λ\_{1}=2.$

Размер области: $s=1,5$

Тогда получим:$ λ=1,5∙2=3$

Подставим данные:

$$P\_{1.5}\left(0\right)=\frac{3^{0}}{0!}e^{-3}=\frac{1}{e^{3}}=\frac{1}{20,0855}=0,0498$$

То есть вероятность того, что в течение 1,5 часов не поступит ни одного иска, составляет 4,98%.

Найдем наивероятнейшее число поступивших за час исков.

Для этого составим закон распределения числа поступивших исков в течение часа. Наивероятнейшим числом будет то, которое имеет наибольшую вероятность.

$$P\_{1}\left(0\right)=\frac{2^{0}}{0!}e^{-2}=\frac{1}{7,389}=0,135$$

$$P\_{1}\left(1\right)=\frac{2^{1}}{1!}e^{-2}=\frac{2}{7,389}=0,27$$

$$P\_{1}\left(2\right)=\frac{2^{2}}{2!}e^{-2}=\frac{2}{7,389}=0,27$$

$$P\_{1}\left(3\right)=\frac{2^{3}}{3!}e^{-2}=\frac{1,33}{7,389}=0,18$$

$$P\_{1}\left(4\right)=\frac{2^{4}}{4!}e^{-2}=\frac{0,67}{7,389}=0,09$$

Таким образом, наивероятнейшее число исков в течение часа составит 1 или 2, вероятность их поступления составит 0,27 (около 27%).

Список литературы

1. Балдин, К.В. Общая теория статистики: Учебное пособие / К.В. Балдин, А.В. Рукосуев. - М.: Дашков и К, 2015. - 312 c.
2. Долгова, В.Н. Теория статистики: Учебник и практикум для академического бакалавриата / В.Н. Долгова, Т.Ю. Медведева. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 245 c.
3. Колесник, Г.В. Теория игр: Учебное пособие / Г.В. Колесник. - М.: КД Либроком, 2014. - 152 c.
4. Малыхин, В.И. Математическое моделирование экономики / В.И. Малыхин. - М.: Ленанд, 2014. - 216 c.
5. Шагин, В.Л. Теория игр: Учебник и практикум / В.Л. Шагин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 223 c.