**Задание № 1**

Вычисление средних геоцентрических координат ИСЗ в системе координат стандартной эпохи по его истинным топоцентрическим координатам, заданным в системе координат эпохи наблюдения.

Постановка задачи и исходные данные

Из обработки наблюдений искусственного спутника Земли на момент всемирного координированного времени UТС𝑠 = 19ℎ 01𝑚 56,511𝑠 получены истинные топоцентрические координаты ИСЗ (прямое восхождение, склонение, расстояние до спутника)

$$\tilde{a}\_{is}^{'}=17^{h}dd^{m}mm,97^{s}, \tilde{δ}\_{is}^{'}=63^{o}mm^{'}dd,88^{''}, \tilde{r}\_{is}^{'}=5882645,68 м$$

в системе координат эпохи наблюдения.

В нашем случае:

$$\tilde{a}\_{is}^{'}=17^{h}4^{m}2,97^{s}, \tilde{δ}\_{is}^{'}=63^{o}2^{'}4,88^{''}, \tilde{r}\_{is}^{'}=5882645,68 м$$

Требуется вычислить средние геоцентрические координаты ИСЗ (𝛼𝑠 , 𝛿𝑠, 𝑟𝑠), соответствующие положению средней точки весеннего равноденствия в стандартную эпоху J2000.0.

Геодезические координаты (геодезическая широта, геодезическая долгота, геодезическая высота) 𝐵𝑖 = 44𝑜𝑑𝑑′𝑚𝑚,00′′, 𝐿𝑖 = 2ℎ 𝑚𝑚𝑚 𝑑𝑑,867𝑠,

𝐻𝑖 = 253,7 м.

В нашем случае 𝐵𝑖 = 44𝑜4′2,00′′, 𝐿𝑖 = 2ℎ 2𝑚 4,867𝑠

пункта земной поверхности заданы относительно референц-эллипсоида с параметрами (большая полуось и сжатие) 𝑎𝑒 = 6378245 м, 𝑓 = 1/298,3 = 0,00335.

Координаты центра референц-эллипсоида Δ𝑋0 = 25,0 м , ΔY0 = −141,0 м, ΔZ0 = −80,0 м

в системе координат общего земного эллипсоида, ориентировка осей координат референцной системы 𝜀𝑥 = 0,10′′ , 𝜀𝑦 = 0,35′′ , 𝜀𝑧 = 0,66′′ относительно системы координат общего земного эллипсоида и масштабный коэффициент 𝛽0 = 2,5∙10−7 заданы.

Координаты мгновенного полюса

𝑥𝑝 =−0,0132′′ , 𝑦𝑝 = 0,1664 ′′.

относительно Международного Условного Начала и поправка за переход от всемирного согласованного времени к всемирному времени ∆𝑈Т1 =−0,3994𝑠 известны.

*Решение:*

1. Вычисляем координаты вектора пункта *i* в референцной системе координат

$$\left(\begin{array}{c}X\_{refi}\\Y\_{refi}\\Z\_{refi}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\left(N\_{i}+H\_{i}\right)cosB\_{i}cosL\_{i}\\\left(N\_{i}+H\_{i}\right)cosB\_{i}sinL\_{i}\\\left(N\_{i}(1-e^{2})+H\_{i}\right)sinB\_{i}\end{array}\right) $$

где $N\_{i}=a\_{e}/\sqrt{1-e^{2}sin^{2}B\_{i}}$ – радиус кривизны первого вертикала, $e^{2}=2f-f^{2}$ – квадрат первого эксцентриситета.

Определяем:

$$e^{2}=2∙0,00335-0,00335^{2}=0,0067$$

$$N\_{i}=\frac{6378245}{\sqrt{1-0,0067^{2}∙sin^{2}44^{0}4^{'}2,00^{''}}}=6378175,8$$

$$\left(\begin{array}{c}X\_{refi}\\Y\_{refi}\\Z\_{refi}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\left(6378175,8+253,7\right)∙0,718∙0,9993\\\left(6378175,8+253,7\right)∙0,718∙0,0355\\\left(6378175,8(1-0,0067^{2})+253,7\right)∙0,6955\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}X\_{refi}\\Y\_{refi}\\Z\_{refi}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}4576506,60\\162579,79\\4435998,54\end{array}\right) $$

2. Вычисляем координаты вектора пункта i в средней общеземной системе координат

$$\left(\begin{array}{c}X\_{i}\\Y\_{i}\\Z\_{i}\end{array}\right)=\left(1+β\_{0}\right)∙\left(\begin{array}{c}1 -ε\_{z } ε\_{y}\\ε\_{z} 1 -ε\_{x}\\-ε\_{y } ε\_{x }1\end{array}\right) \left(\begin{array}{c}X\_{refi}\\Y\_{refi}\\Z\_{refi}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}∆X\_{0}\\∆Y\_{0}\\∆Z\_{0}\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}X\_{i}\\Y\_{i}\\Z\_{i}\end{array}\right)=\left(1+2,5∙10^{-7} \right)∙\left(\begin{array}{c}1 -0,66'' 0,35''\\0,66'' 1 0,50''\\ -0,35^{''} 0,10^{''} 1\end{array}\right) \left(\begin{array}{c}4576506,60\\162579,79\\4435998,54\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}25\\-141\\-80\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}X\_{i}\\Y\_{i}\\Z\_{i}\end{array}\right)= \left(\begin{array}{c}3157814,55\\351031,35\\3326918,90\end{array}\right) $$

3. Вычисляем координаты вектора пункта *i* в мгновенной общеземной системе координат

$$\left(\begin{array}{c}\overbar{X}\_{i}\\\overbar{Y}\_{i}\\\overbar{Z}\_{i}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1 0 -x\_{p}\\0 1 y\_{p}\\x\_{p} -y\_{p }1\end{array}\right) \left(\begin{array}{c}X\_{i}\\Y\_{i}\\Z\_{i}\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}\overbar{X}\_{i}\\\overbar{Y}\_{i}\\\overbar{Z}\_{i}\end{array}\right)=\left( \begin{array}{c}1 0 0,0132'' \\0 1 0,1664 ''\\-0,0132^{''} -0,1664 '' 1\end{array}\right) \left(\begin{array}{c}3157814,55\\351031,35\\3326918,90\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}\overbar{X}\_{i}\\\overbar{Y}\_{i}\\\overbar{Z}\_{i}\end{array}\right)= \left(\begin{array}{c}3199497,70\\409442,97\\2729404,26\end{array}\right) $$

4. Вычисляем составляющие нутации в долготе ∆𝜓 и наклонности

∆𝜓= −17,21′′ sin𝐹5 + 0,003′′ cosF5 −1,32′′sin2(𝐹3 − 𝐹4 + 𝐹5) − 0,23′′ sin 2(𝐹3 + 𝐹5 ) +0,21′′ sin 2𝐹5 + 0,15′′ sin 𝐹2 − 0,05′′ sin(𝐹2 + 2𝐹3 − 2𝐹4 + 2𝐹5 ) + 0,07′′ sin 𝐹1 ;

∆𝜀= 9,21 ′′ cos 𝐹5 + 0,002′′ sin𝐹5 + 0,57′′ cos 2(𝐹3 − 𝐹4 + 𝐹5) + 0,10′′ cos 2(𝐹3 + 𝐹5 ) −0,09′′ cos 2𝐹5 + 0,01′′ cos 𝐹2 + 0,02′′ cos(𝐹2 + 2𝐹3 − 2𝐹4 + 2𝐹5),

где 𝐹𝑖 - фундаментальные аргументы Делоне

𝐹1 ≡ 𝑙= 134,96340251𝑜 + 1717915923,2178 ′′𝑡+ 31,8792′′ 𝑡2 + 0,051635′′ 𝑡3 −0,00024470′′ 𝑡4 ;

𝐹2 ≡ 𝑙′ = 357,52910918𝑜 + 129596581,0481′′ 𝑡− 0,5532′′ 𝑡2 + 0,000136′′ 𝑡3 −

0,00001149′′ 𝑡4

𝐹3 ≡ 𝐹= 93,272090062𝑜 + 1739527262,8478′′ 𝑡− 12,7512′′ 𝑡2 − 0,001037′′ 𝑡3 +0,00000417′′ 𝑡4 ;

𝐹4 ≡ 𝐷= 297,85019547𝑜 + 1602961601,2090′′ 𝑡− 6,3706′′ 𝑡2 + 0,006593′′ 𝑡3 −0,00003169′′ 𝑡4 ;

𝐹5 ≡ Ω = 125,04455501𝑜 − 6962890,5431′′ 𝑡+ 7,4722′′ 𝑡2 + 0,007702′′ 𝑡3 −

0,00005939′′ 𝑡4;

𝑡= (𝐽𝐷− 2451545,0) / 36525 - промежуток времени в юлианских столетиях от стандартной эпохи до момента наблюдений;

𝐽𝐷= 1721013,5 + 367 ∙ 2019 – 𝐸{7[2019 + 𝐸((2+ 9)/12)]/4} + 𝐸(275 ∙ 2/9) +4+ (𝑈T1)𝑑 - юлианская дата, 𝐸(𝑥) - целая часть числа x;

𝑈T1 = 𝑈TC+ ∆𝑈T1 - момент Всемирного времени.

Вычислим неизвестные величины:

𝑈T1 = = 19ℎ 012 56,511𝑠 −0,3994𝑠 = 19ℎ 012 56,112𝑠

𝐽𝐷= 1721013,5 + 367 ∙ 2019 – 𝐸{7[2019 + 1\*0,917]/4} + 𝐸(275 ∙ 2/9) +4 – 0,3994 =2692244,75

𝑡= (2692244,75− 2451545,0) / 36525 = 6,59

𝐹1 ≡ 𝑙= 134,96340251𝑜 + 1717915923,2178′′ \*6,59 + 31,8792′′ 6,592 + +0,051635′′ 6,593 −0,00024470′′ 6,594 = 134,96340251𝑜+11321065934,0053′′+

+1384,4499′′+14,7774′′-0,4612′′= 135° 4’ 35”

𝐹2 ≡ 𝑙′ = 357,52910918𝑜 + 129596581,0481′′ 6,59− 0,5532′′ 43,428 + 0,000136′′ 286,191 −0,00001149′′ 1885 = 358° 25’ 22.0”

𝐹3 ≡ 𝐹= 93,272090062𝑜 + 1739527262,8478′′ 6,59− 12,7512′′ 43,428 − 0,001037′′ 286,191 +0,00000417′′ 1885,00 = 93° 23’ 11′′

𝐹4 ≡ 𝐷= 297,85019547𝑜 + 1602961601,2090′′ 6,59− 6,3706′′ 43,428 + 0,006593′′ 286,191 −0,00003169′′ 1885,00 = 297° 57’ 20”

𝐹5 ≡ Ω = 125,04455501𝑜 − 6962890,5431′′ 6,59+ 7,4722′′ 43,428 + 0,007702′′ 286,191 −0,00005939′′ 1885,00 = 125° 30’ 12.286”

∆𝜓= −17,21′′ sin 125° 30’ 12.286” + 0,003′′ cos 125° 30’ 12.286” −1,32′′sin 2(93° 23’ 11′′ − 297° 57’ 20”+ 125° 30’ 12.286”) − 0,23′′ sin 2(93° 23’ 11′′ + 125° 30’ 12.286”) +0,21′′ sin 2 125° 30’ 12.286” + 0,15′′ sin 358° 25’ 22.0” − 0,05′′ sin(358° 25’ 22.0” + 2 93° 23’ 11′′ − 2 297° 57’ 20” + 2 125° 30’ 12.286”) + 0,07′′ sin 135° 4’ 35” = −17,21′′ 0,814 - 0,003′′ 0,5807 +1,32′′ 0,3725 − 0,23′′ 0,9773 -0,21′′ 0,9455 - 0,15′′ 0,0275 + 0,05′′ 0,3631 + 0,07′′ 0,7062 = −14,01′′-−0,0017′′+0,4917′′−0,2248′′−0,1986′′−0,0041′′+0,0181′′+0,0494′′=*−13,88′′*

∆𝜀= 9,21 ′′ cos 125° 30’ 12.286” + 0,002′′ sin 125° 30’ 12.286” + 0,57′′ cos 2 (93° 23’ 11′′ − 297° 57’ 20” + 125° 30’ 12.286”) + 0,10′′ cos 2(93° 23’ 11′′ + 125° 30’ 12.286”) −0,09′′ cos 2 125° 30’ 12.286” + 0,01′′ cos 358° 25’ 22.0” + 0,02′′ cos(358° 25’ 22.0” + 2 93° 23’ 11′′ − 2 297° 57’ 20” + 2 125° 30’ 12.286”) =

= 9,21′′ (-0,5807) + 0,002′′ 0,8141 + 0,57′′ 0,9280 + 0,10′′ 0,2117 +

+0,09′′ 0,3254 + 0,01′′ 0,9996 - 0,02′′ 0,9379 =

=-5,348′′ +0,0016′′+0,5290′′+0,0211′′+0,0293′′+0,10′′=-4,667′′

5. Вычисляем координаты вектора пункта i в истинной равноденственной системе координат на момент наблюдения

$$\left(\begin{array}{c}\overbar{x}\_{i}\\\overbar{y}\_{i}\\\overbar{z}\_{i}\end{array}\right)=W^{T}∙\left(\begin{array}{c}\tilde{X\_{i}}\\\tilde{Y\_{i}}\\\tilde{Z\_{i}}\end{array}\right) $$

где $W=\left(-\begin{array}{c}cosS sinS 0\\sinS cosS 0\\0 0 1\end{array}\right) $матрица суточного вращения Земли;

𝑆= 6ℎ 41𝑚 50,54841𝑠 + 8640184,812866𝑠 𝑡+ 0,093104𝑠 𝑡2 − 6,2𝑠 10−6 𝑡3 + +𝑈Т1 + 0,06667∆𝜓cos𝜀 – момент гринвичского звёздного времени;

𝜀= 84381,448′′ − 46,84024′′ 𝑡− 0,00059′′ 𝑡2 + 0,001813′′ 𝑡3 - средний наклон эклиптики к экватору.

𝜀= 84381,448′′ − 46,84024′′ 6,59− 0,00059′′ 43,428 + 0,001813′′ 286,191 =

= 84381,448′′ − 308,67718′′− 0,02562′′ + 0,051886′′ = 84072,79709′′

𝑆= 6ℎ 41𝑚 50,54841𝑠 + 8640184,812866𝑠 6,59+ 0,093104𝑠 43,428 − 6,2𝑠 10−6 286,191 + 19ℎ 012 56,112𝑠 + 0,06667(−13,88′′) 0,9181 = 6ℎ 41𝑚 50,54841𝑠 + 56938817,91579𝑠+ 4,04332𝑠 – 0,00117𝑠 + 19ℎ 012 56,112𝑠 - 0,84959 𝑠 =

= 6ℎ 41𝑚 50,54841𝑠 + 56938821,10835𝑠 + 19ℎ 012 56,112𝑠 =

= 6ℎ 41𝑚 50,54841𝑠 + 158ℎ 20𝑚 21,10𝑠 + 19ℎ 012 56,112𝑠 = 184ℎ 04𝑚 08,76041𝑠

$$W=\left(\begin{array}{c}-0,9975 -0,0710 0\\0,0710 -0,9975 0\\0 0 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-1,0685\\-0,9265\\1\end{array}\right) =-0,995$$

$$\left(\begin{array}{c}\overbar{x}\_{i}\\\overbar{y}\_{i}\\\overbar{z}\_{i}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-3183500,21\\-407395,75\\-2715757,24\end{array}\right) $$

6. Вычисляем истинные топоцентрические координаты вектора спутника в равноденственной системе координат на момент наблюдения

$$\left(\begin{array}{c}\tilde{x}\_{is}^{'}\\\tilde{y}\_{is}^{'}\\\tilde{z}\_{is}^{'}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\tilde{r}\_{is}^{'}cos\tilde{α}\_{is}^{'} cos\tilde{δ}\_{is}^{'}\\\tilde{r}\_{is}^{'}sin\tilde{α}\_{is}^{'} cos\tilde{δ}\_{is}^{'}\\\tilde{r}\_{is}^{'}sin\tilde{δ}\_{is}^{'}\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}\tilde{x}\_{is}^{'}\\\tilde{y}\_{is}^{'}\\\tilde{z}\_{is}^{'}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}5882645,68 ∙cos17^{h}4^{m}2,97^{s}∙ cos63^{o}2^{'}4,88^{''}\\5882645,68∙sin17^{h}4^{m}2,97^{s} cos63^{o}2^{'}4,88^{''}\\5882645,68∙sin63^{o}2^{'}4,88^{''}\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}\tilde{x}\_{is}^{'}\\\tilde{y}\_{is}^{'}\\\tilde{z}\_{is}^{'}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}5882645,68 ∙0.9559∙ 0.4534\\5882645,68∙0.2935∙ 0.4534\\5882645,68∙0.8913\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}2549568,40 \\782820,72\\5243202,09\end{array}\right)$$

7. Вычисляем истинные геоцентрические координаты вектора спутника s в равноденственной системе координат на момент наблюдения

$$\left(\begin{array}{c}\tilde{x}\_{s}^{}\\\tilde{y}\_{s}^{}\\\tilde{z}\_{s}^{}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\overbar{x}\_{i}\\\overbar{y}\_{i}\\\overbar{z}\_{i}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\tilde{x}\_{is}^{'}\\\tilde{y}\_{is}^{'}\\\tilde{z}\_{is}^{'}\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c}\tilde{x}\_{s}^{}\\\tilde{y}\_{s}^{}\\\tilde{z}\_{s}^{}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-3183500,21\\-407395,75\\-2715757,24\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}2549568,40 \\782820,72\\5243202,09\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}633931,81 \\375424,97\\2527444,85\end{array}\right)$$

8. Вычисляем прецессионные параметры Ньюкома-Андуайе

𝜁𝐴 =2,5976176′′ + 2306,0809506′′ 𝑡+ 0,3019015′′ 𝑡2 + 0,0179663′′ 𝑡3 −0,0000327′′ 𝑡4−0,0000002′′ 𝑡5;

𝜃𝐴 = 2004,1917476′′𝑡− 0,4269353′′ 𝑡2 − 0,0418251′′ 𝑡3 − 0,0000601′′ 𝑡4

− 0,0000001′′ 𝑡5;

𝑧𝐴 = −2,5976176′′ + 2306,0803226′′ 𝑡+ 1,0947790′′ 𝑡2 + 0,0182273′′ 𝑡3 +0,0000470′′ 𝑡4 − 0,0000003′′ 𝑡5

𝜁𝐴 =2,5976176′′ + 2306,0809506′′ 6,59+ 0,3019015′′ 43,43 + 0,0179663′′ 286,19 −0,0000327′′ 1885,00−0,0000002′′ 12428,74 = 2,5976176′′ + 15197,07346′′+13,11582′′+5,14177′′−0,06164′′−0,00248′′= 15217,86455′′

𝜃𝐴 = 2004,1917476′′ 6,59− 0,4269353′′ 43,43 − 0,0418251′′ 286,19 − 0,0000601′′ 1885,00− 0,0000001′′ 12428,74 = 13207,62363′′− 18,54157′′ − 11,96846′′ − 0,11310′′− 0,00124′′ = 13176,99926′′

𝑧𝐴 = −2,5976176′′ + 2306,0803226′′ 6,59+ 1,0947790′′ 43,43 + 0,0182273′′ 286,19 +0,0000470′′ 1885,00 − 0,0000003′′ 12428,74 = −2,5976176′′ + 15197,06931′′+47,54629′′+5,21647′′+0,08859′′−0,00373′′ = 15247,31931′′

9. Формируем матрицы прецессии и нутации

𝑃= 𝑅3 (−𝑧𝐴)𝑅2 (𝜃𝐴)𝑅3 (−𝜁𝐴)

𝑁= 𝑅1 (−𝜀− Δ𝜀)𝑅3 (−Δ𝜓)𝑅1 (𝜀) ,

где

$$R\_{1}(α)=\left(0 \begin{array}{c}1 0 0\\ cosα sinα\\0 -sinα cosα\end{array}\right) $$

$$R\_{2}(α)=\left(0 \begin{array}{c}cosα 0 -sinα\\ 1 0\\sinα 0 cosα\end{array}\right) $$

$$R\_{3}(α)=\left(-sinα \begin{array}{c}cosα sinα 0\\ cosα 0\\0 0 1\end{array}\right) $$

$$R\_{1}\left(α\right)=\left(0 \begin{array}{c}1 0 0\\ 0.9973 0.0737\\0 -0.0737 0.9973\end{array}\right) =0.0554 $$

$$R\_{2}\left(α\right)=\left(0 \begin{array}{c}0.9980 0 -0.0638\\ 1 0\\0.0638 0 0.9980\end{array}\right)=0.0445 $$

$$R\_{3}\left(α\right)=\left(-0.0738 \begin{array}{c}0.9973 0.0738 0\\ 0.9973 0\\0 0 1\end{array}\right) =-0.0554 $$

𝑃= -0.0554 (−15247,31931′′)\*0.0445 (13176,99926′′)\*(-0.0554) (−15217,86455′′) = -12.4946′′

𝑁= 0.0554 (−84072,79709′′+4,667′′)\*(-0.0554) *\**13,88′′)\*0.0554 (−84072,79709′′) = - 41.9930′′

10. Вычисляем средние геоцентрические координаты вектора спутника *s* в равноденственной системе координат на стандартную эпоху J2000.0

$$\left(\begin{array}{c}X\_{s}\\Y\_{s}\\Z\_{s}\end{array}\right)= P^{T}∙N^{T} \left(\begin{array}{c}\tilde{x}\_{s}^{}\\\tilde{y}\_{s}^{}\\\tilde{z}\_{s}^{}\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}X\_{s}\\Y\_{s}\\Z\_{s}\end{array}\right)= -12.4946''∙\left(- 41.99300'' \right)\left(\begin{array}{c}633931,81 \\375424,97\\2527444,85\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}X\_{s}\\Y\_{s}\\Z\_{s}\end{array}\right)= 524.6857^{''}\left(\begin{array}{c}633931,81 \\375424,97\\2527444,85\end{array}\right)= \left(\begin{array}{c}332614979.44 \\196977973.26\\1326099763.90\end{array}\right) $$

11. Вычисляем полярные средние геоцентрические координаты спутника *s* в равноденственной системе координат на стандартную эпоху J2000.0

$$α\_{s}=arctg\frac{y\_{s}}{x\_{s}}$$

$$δ\_{s}=arctg\frac{z\_{s}}{\sqrt{x\_{s}^{2}+y\_{s}^{2}}}$$

$$r\_{s}=\sqrt{x\_{s}^{2}+y\_{s}^{2}+z\_{s}^{2}}$$

$$α\_{s}=arctg\frac{196977973.26}{332614979.44}=arctg0.592=0.0103$$

$$δ\_{s}=arctg\frac{1326099763.90}{\sqrt{196977973.26^{2}+332614979.44^{2}}}=arctg3.430= 0.05979$$

$$r\_{s}=\sqrt{196977973.26^{2}+332614979.44^{2}+1326099763.90^{2}}=1381097389.76 м$$

**Задание № 2**

Вычисление элементов невозмущённой орбиты по наблюдениям спутника с пункта земной поверхности

Постановка задачи

Пусть с пункта земной поверхности, координаты которого известны, выполнены наблюдения искусственного спутника Земли и определены топоцентрические направления и расстояния до трёх его мгновенных положений. В результате вычислены геоцентрические прямоугольные координаты этих мгновенных положений. Требуется вычислить элементы орбиты спутника.

Для решения подобной задачи разработано много методов определения орбит. Наиболее широко используемым является классический метод Гаусса. Здесь приводится алгоритм модифицированного метода Гаусса.

Исходные данные

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Момент времени, с | Координаты ИСЗ в равноденственной системе координат |
| x, м | y, м | z, м |
| 4 | 0 | -41061388,755  | -2112567,611  | 1954505,021  |
| 120 | -41041305,330  | -2485298,627  | 1943523,154  |
| 240 | -41017844,241  | -2857825,105  | 1932381,337 |

*Решение:*

1. Вычисляем геоцентрические прямые восхождения, склонения и модули векторов ИСЗ для трёх его положений

$$α\_{s}=arctg\frac{y\_{s}}{x\_{s}}$$

$$δ\_{s}=arctg\frac{z\_{s}}{\sqrt{x\_{s}^{2}+y\_{s}^{2}}}$$

$$r\_{s}=\sqrt{x\_{s}^{2}+y\_{s}^{2}+z\_{s}^{2}}$$

Для точки 0 с:

$$α\_{s}=arctg\frac{-2112567,611}{-41061388,755}=2,945^{0}$$

$$δ\_{s}=arctg\frac{1954505,021}{\sqrt{-2112567,611^{2}+(-41061388,755^{2})}}=2,720^{0}$$

$$r\_{s}=\sqrt{-2112567,611^{2}+(-41061388,755^{2})+1954505,021^{2}}=41162142,80$$

Для точки 120 с:

$$α\_{s}=arctg\frac{-2485298,627}{-41041305,330}=3,462^{0}$$

$$δ\_{s}=arctg\frac{1943523,154}{\sqrt{-41041305,330^{2}+(-2485298,627^{2})}}=2,708^{0}$$

$$r\_{s}=\sqrt{-41041305,330^{2}+(-2485298,627^{2})+1943523,154^{2}}=41157708,88$$

Для точки 240 с:

$$α\_{s}=arctg\frac{-2857825,105 }{-41017844,241}=3,987^{0}$$

$$δ\_{s}=arctg\frac{1932381,337}{\sqrt{-41017844,241^{2}+(-2857825,105^{2})}}=2,691^{0}$$

$$r\_{s}=\sqrt{-41017844,241^{2}+(-2857825,105^{2})+1932381,337^{2}}=41162652,97$$

2. Вычисляем угол наклона *i* плоскости орбиты ИСЗ к плоскости экватора Земли по формуле

$$cos\_{i}=\frac{x\_{1}y\_{3}-x\_{3}y\_{1}}{\sqrt{\left(y\_{1}z\_{3}-y\_{3}z\_{1}\right)^{2}+\left(x\_{3}z\_{1}-x\_{1}z\_{3}\right)^{2}+\left(x\_{1}y\_{3}-x\_{3}y\_{1}\right)^{2}}}=2,691^{0}$$

$cos\_{i}=\frac{117∙10^{12}-86.65∙10^{12}}{\sqrt{\left((-4,08∙10^{12})-(-4,08∙10^{12})\right)^{2}+\left((-80,17∙10^{12})-(-79,35∙10^{12})\right)^{2}+\left(117,35∙10^{12}-86,65∙10^{12}\right)^{2}}}=\frac{30,35∙10^{12}}{\sqrt{0^{2}+\left(-0,82∙10^{12}\right)^{2}+\left(30,70∙10^{12}\right)^{2}}}=\frac{30,35∙10^{12}}{\sqrt{0,672∙10^{24}+942,49∙10^{24}}}=0,9882 $ =

Угол *i* равен 0°59'17".520

3. Вычисляем долготу восходящего узла Ω орбиты ИСЗ, используя формулы

$$sin⁡(α\_{1}-Ω)=ctgi∙tgδ\_{1}$$

$$tg⁡(α\_{1}-Ω)=\frac{tgδ\_{1}∙sin⁡(α\_{3}-α\_{1})}{tgδ\_{3}-tgδ\_{1}∙cos⁡(α\_{3}-α\_{1})}$$

$$\sin(\left(α\_{1}-Ω\right))=57,94^{0}∙0.0475=2.752$$

Ω = 0°11'34".800

4. Вычисляем значения аргументов широты для трёх положений ИСЗ

$$cosu\_{s}=cos⁡(α\_{s}-Ω)∙cosδ\_{s}$$

$$sinu\_{s}=\frac{sinδ\_{s}}{sini}$$

Для точки 0 с

$cosu\_{s}=cos⁡(2°56'42"-0°11'34".800)∙cos2°43'12"=0,9988∙0,9989 =0,9977$ = 0°59'51".720

$sinu\_{s}=\frac{sinδ\_{s}}{sini}=\frac{0,0474}{0,0172}=2,7558$ = 2°45'20".880

Для точки 120 с

$cosu\_{s}=cos⁡(3°59'13,200"-0°11'34".800)∙cos2°42'28,800"=0,9978∙0,9989 =0,9967$ = 0°59'48".120

$sinu\_{s}=\frac{sinδ\_{s}}{sini}=\frac{0,0472}{0,0172}=2,7442$ = 2°44'39".120

Для точки 240 с

$cosu\_{s}=cos⁡(3°59'13,200"-0°11'34".800)∙cos2°41'27,600"=0,9978∙0,9989 =0,9967$ = 0°59'48".120

$sinu\_{s}=\frac{sinδ\_{s}}{sini}=\frac{0,0472}{0,0172}=2,7442$ = 2°44'39".120

Вычисляем фокальный параметр

$$p=\frac{r\_{1}\left[\sin(\left(u\_{3}-u\_{1}\right))+\sin(\left(u\_{1}-u\_{2}\right))\right]+\sin(\left(u\_{2}-u\_{3}\right))}{\sin(\left(u\_{2}-u\_{3}\right))+\frac{r\_{1}}{r\_{2}}\sin(\left(u\_{3}-u\_{1}\right))+\frac{r\_{1}}{r\_{3}}\sin(\left(u\_{1}-u\_{2}\right))}$$

$$p=\frac{41162142,80∙0.000203+0.000242+0.000242}{0.000242+\frac{41162442.8}{41157708,88}0.000203+\frac{41162442.8}{41162652,97}0.000203}=12894943.46$$

5. Вычисляем истинную аномалию для первого положения ИСЗ, используя формулы

$$tgϑ\_{1}=\frac{\frac{p-r\_{1}}{r\_{1}}cos\left(u\_{2}-u\_{1}\right)-\frac{p-r\_{2}}{r\_{2}}}{\frac{p-r\_{1}}{r\_{1}}sin\left(u\_{2}-u\_{1}\right)}$$

$$sign\left(e∙cosϑ\_{1}\right)=sign\left(\frac{p-r\_{1}}{r\_{1}}\right)$$

$$tgϑ\_{1}=\frac{\frac{12894943.46-41162142,80}{41162142,80}cos\left(0.9967-0,9977\right)-\frac{12894943.46-41157708,88}{41157708,88}}{\frac{12894943.46-41162142,80}{41162142,80}sin\left(2,7442-2.7558\right)}$$

$$tgϑ\_{1}=\frac{\left(-0.687\right)∙1+0.687}{(-0.687)∙0.000203}=0$$

$$sign\left(ecosϑ\_{1}\right)=sign\left(\frac{12894943.46-41162142,80}{41162142,80}\right)$$

6. Вычисляем эксцентриситет орбиты

$$e=\frac{p-r\_{1}}{r\_{1}∙cosϑ\_{1}}$$

$$e=\frac{12894943.46-41162142,80}{41162142,80∙1}=-0.687$$

7. Вычисляем аргумент перицентра

$$ω=u\_{1}-ϑ\_{1}$$

$$ω=2.7558-1=1.7558$$

8. Вычисляем большую полуось орбиты

$$a=\frac{p}{1-e^{2}}=\frac{12894943.46}{1-0.472}=24422241.40$$

9. Вычисляем среднее движение

$$n=\frac{\sqrt{μ}}{a\sqrt{a}}$$

где μ = 3,9860044\*1014 м3с-2 - геоцентрическая гравитационная постоянная

$$n=\frac{\sqrt{3,9860044∙10^{14}}}{24422241,4\sqrt{24422241,4}}=0,000165$$

10. Вычисляем эксцентрическую аномалию ИСЗ для его первого положения по формулам

$$cosE\_{1}=\frac{e+cosϑ\_{1}}{1+ecosϑ\_{1}}$$

$$sinE\_{1}=\frac{\sqrt{1-e^{2}}+sinϑ\_{1}}{1+ecosϑ\_{1}}$$

$$cosE\_{1}=\frac{-0.687+1}{1-0.687}=1$$

$$sinE\_{1}=\frac{\sqrt{1-(-0.687)^{2}}+0}{1-0.687}=2.322$$

E = 0.0405 или 0°2'26"

11. Вычисляем момент предыдущего прохождения ИСЗ через перицентр

$$τ=t\_{1}-\frac{E\_{1}-esinE\_{1}}{n}$$

$$τ=240-\frac{0.0405-\left(-0.687\right)∙0.00071}{0.000165}=5.75$$

12. Вычисляем значение средней аномалии 𝑀1 на момент времени 𝑡1

𝑀1 = n(𝑡1 – 𝜏)

𝑀1 = 0.000165(0 – 5.75) = 0.000949

**Задание № 3**

Вычисление невозмущённой эфемериды ИСЗ

Постановка задачи и исходные данные

В качестве исходных данных студент использует элементы орбиты 𝑎, 𝑒, *i*, Ω, 𝜔, 𝑀1 в момент времени 𝑡1 , вычисленные в задании № 2.

Требуется на заданный момент времени 𝑡= 𝑡1 + 3ℎ вычислить прямоугольные координаты 𝑥, 𝑦, 𝑧 и составляющие скорости 𝑥,̇ 𝑦,̇ 𝑧 искусственного спутника Земли.

*Решение:*

1. Вычисляем среднее движение ИСЗ

$$n=\frac{\sqrt{μ}}{a\sqrt{a}}$$

где μ = 3,9860044\*1014 м3с-2 - геоцентрическая гравитационная постоянная

$$n=\frac{\sqrt{3,9860044∙10^{14}}}{24422241,4\sqrt{24422241,4}}=0,000165$$

2. Вычисляем среднюю аномалию на заданный момент времени t

𝑀= 𝑀1 + n(𝑡− 𝑡1 )

𝑀= 0.000949 + 0.000165(240− 120) = 0,0207

3. Задавшись точностью вычислений ε, методом последовательных приближений вычисляем эксцентрическую аномалию

𝐸0 = 𝑀+ 𝑒sin𝑀;

𝐸𝑘 = 𝑀+ 𝑒sin𝐸𝑘−1 , k=1,2…,n.

Вычисления прекращаем, когда |𝐸𝑘 − 𝐸𝑘−1 | < 𝜀= 0,0000001𝑜

𝐸0 = 0.0207+ (-0.687)\* 0.000364 = 0.02045

при k=1

𝐸𝑘 = 0,0207+ (-0.687)\*sin0= 0,0207

при k=2

𝐸𝑘 = 0,0207+ (-0.687)\*sin1= 0,009 и т.д.

4. Вычисляем истинную аномалию

$$ϑ=E+2arctg\left(\frac{esinE}{1+\sqrt{1-e^{2}}-ecosE}\right)$$

$$ϑ=0.02045+2arctg\left(\frac{(-0.687)∙0.000364 }{1+\sqrt{1-(-0.687)^{2}}-(-0.687)∙0.9999}\right)$$

$$ϑ=0.02045+2arctg\left(\frac{-0.000250}{2.0977}\right)=0.02045+0.0218=0.04225$$

5. Вычисляем аргумент широты

𝑢= 𝜔+ 𝜗 = 1.7558+0.04225 = 1.7980

6. Вычисляем геоцентрическое расстояние до спутника

$$r=\frac{a(1-e^{2})}{1+ecosϑ}=\frac{3.987∙1-(-0.687)^{2}}{1+(-0.687)∙1}=6.725$$

7. Вычисляем прямоугольные координаты спутника

$$\left(\begin{array}{c}X\_{}\\Y\_{}\\Z\_{}\end{array}\right)= r \left(\begin{array}{c}cosΩ∙cosu-sinΩ∙sinu∙cosi\\sinΩ∙cosu+cosΩ∙sinu∙cosi\\sinu∙sini\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}X\_{}\\Y\_{}\\Z\_{}\end{array}\right)= 6.725 \left(\begin{array}{c}1∙0.9995-0.00337∙0.03138∙0.9998\\0.00337∙0.9995+1∙0.03138∙0.9998\\0.03138∙0.01724\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}X\_{}\\Y\_{}\\Z\_{}\end{array}\right)= \left(\begin{array}{c}6.7209\\0.2336\\0.0036\end{array}\right) $$

8. Вычисляем составляющие скорости спутника

$$\left(\begin{array}{c}X\_{}\\Y\_{}\\Z\_{}\end{array}\right)= \sqrt{\frac{μ}{p}}e∙sinϑ∙ \left(\begin{array}{c}cosΩ∙cosu-sinΩ∙sinu∙cosi\\sinΩ∙cosu+cosΩ∙sinu∙cosi\\sinu∙sini\end{array}\right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{μ}{p}}(1+e∙cosϑ)∙ \left(\begin{array}{c}-cosΩ∙sinu-sinΩ∙cosu∙cosi\\-sinΩ∙sinu+cosΩ∙cosu∙cosi\\cosu∙sini\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}X\_{}\\Y\_{}\\Z\_{}\end{array}\right)= \sqrt{\frac{3,9860044∙10^{14}}{12894943.46}}(-0.687)∙0.00074∙ \left(\begin{array}{c}1∙0.9995-0.00337∙0.03138∙0.9998\\0.00337∙0.9995+1∙0.03138∙0.9998\\0.03138∙0.01724\end{array}\right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{3,9860044∙10^{14}}{12894943.46}}(1+(-0.687)∙1)∙ \left(\begin{array}{c}-0.9995∙0.03138-0.00337∙0.9995∙0.9998\\-0.00337∙0.03138+0.9995∙0.9995∙0.9998\\0.9995∙0.01724\end{array}\right) $$

$$\left(\begin{array}{c}\acute{X}\_{}\\\acute{Y}\_{}\\\acute{Z}\_{}\end{array}\right)= -2.826∙ \left(\begin{array}{c}0.9994\\0.0347\\0.00054\end{array}\right)-2.826 ∙\left(\begin{array}{c}-0.03473\\0.99869\\0.01725\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}-2.72615\\-2.92036\\-0.05028\end{array}\right)$$

**Задание № 4**

Вычисление элементов орбиты ИСЗ по координатам и составляющим скорости

Постановка задачи и исходные данные

На момент времени t заданы координаты x, y, z и составляющие скорости 𝑥,̇ 𝑦,̇ 𝑧̇ искусственного спутника Земли. Требуется вычислить элементы орбиты a, e, i, Ω, ω, M на тот же момент времени. В качестве исходных данных студент использует результаты, полученные в задании № 3.

*Решение:*

1. Вычисляем постоянные площадей

𝑐1 = 𝑦𝑧̇− 𝑦̇𝑧 ;

𝑐2 = 𝑥̇𝑧− 𝑥𝑧̇ ;

𝑐3 = 𝑥𝑦̇− 𝑥̇𝑦;

$$с=\sqrt{с\_{1}^{2}+с\_{2}^{2}+с\_{3}^{2}}$$

𝑐1 = 0,2336\*(-0,05028)− (2,92036\*0,0036) = -0,12791

𝑐2 = (-2,72615)\*0,0036− 6,7209\*(-0,05028)=-0,34774

𝑐3 = 6,7209\*(-2,92036)− (-2,72615\*0,2336) = -18,99057

$$с=\sqrt{-0,12791^{2}+-0,34774^{2}+-18.99057^{2}}=18.99418$$

2. Вычисляем фокальный параметр

$$p=\frac{c^{2}}{μ}=\frac{18.99418^{2}}{3,9860044∙10^{14}}=9.051∙10^{-13}$$

3. Вычисляем угол наклона плоскости орбиты к плоскости экватора

$$i=\arccos(\left(\frac{c\_{3}}{c}\right))=arccos\frac{18.99057}{18.99418}=arccos0.9998=1.1459$$

4. С помощью формул

$$sinΩ=\frac{c\_{1}}{c∙sini}$$

$$cosΩ=-\frac{c\_{2}}{c∙sini}$$

вычисляем долготу восходящего узла Ω

$$sinΩ=\frac{c\_{1}}{c∙sini}=\frac{-0.12791}{18.99418∙0.01724}=-0.3906$$

$$cosΩ=-\frac{-0.34774}{18.99418∙0.01724}=-1.0619$$

Ω = 0.00681

5. Вычисляем квадрат скорости спутника и геоцентрическое расстояние до спутника

$$ϑ^{2}=x^{2}+y^{2}+z^{2}$$

$$r=\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$$

$$ϑ^{2}=-2.72615^{2}+-2.92036^{2}+-0.05028^{2}=15.9629$$

$$r=\sqrt{-2.72615^{2}+-2.92036^{2}+-0.05028^{2}}=3.995$$

6. Вычисляем постоянную энергии

$$h=ϑ^{2}-\frac{2μ}{r}=15.9629-\frac{2∙3,9860044}{6.725}=14.7775$$

7. Вычисляем большую полуось орбиты спутника

$$a=-\frac{μ}{h}=\frac{3,9860044}{14.7775}=0.2697$$

8. Вычисляем составляющие вектора Лапласа

f1 =D'x− Dx'

f2 =D'y− Dy'

f3 =D'z− Dz'

$$f=\sqrt{f\_{1}^{2}+f\_{2}^{2}+f\_{3}^{2}}$$

где

D = x x'+ y y'+ z z'

$$\acute{D}=\frac{μ}{r}+h$$

D = 6.7209 (-2.72615)+ 0.2336 (-2.92036)+ 0.0036 (-0.005028) = -19.00441

$$\acute{D}=\frac{3.9860044}{6.725}+14.7775=15.3702$$

f1 =D'x− Dx'=19.00441\*6.7209-15.3702\*(-2.72615) = 169.6282

f2 =D'y− Dy' = 15.3702\*0.2336-19.00441\*(-2.92036) = 59.08929

f3 =D'z− Dz'=19.00441\*0.0036-15.3702\*(-0.005028)=0.14570

$$f=\sqrt{169.6282^{2}+59.08929^{2}+0.14570^{2}}=179.62$$

9. Вычисляем эксцентриситет орбиты спутника по формулt^

$$e=\frac{f}{μ}=\frac{179.62}{3.9860044}=45.064$$

10. На основании формулы вычисляем аргумент перицентра 𝜔

$$sinω=\frac{f\_{3}}{f∙sini}=\frac{0.14570}{179.62∙0.01724}=0.047$$

ω = 2.690

11. С помощью формулы вычисляем истинную аномалию

$$sinϑ=\frac{D}{e∙r}∙\sqrt{\frac{p}{μ}}=\frac{19.00441}{45.064∙3.995}∙\sqrt{\frac{9.051}{3,9860044}}=0.1591$$

𝜗 = 9.15470

12. С помощью формулы вычисляем эксцентрическую аномалию 𝐸.

$$cosE=\frac{e+cosϑ}{1+e∙cosϑ}=\frac{45.064+0.9873}{1+45.064∙0.9873}=1.0123$$

E =11.428

13. Вычисляем среднюю аномалию

$$M=E-e∙sinE=11.428-45.064∙0.1981=2.501$$

**Задание № 5**

Вычисление ориентирующих углов земной хорды по наблюдениям спутника с двух пунктов земной поверхности

Постановка задачи

При выполнении уравнительных вычислений по определению компонентов вектора пункт-пункт необходимо располагать их приближёнными значениями. Вычисление этих значений можно осуществить на основе элементарной фигуры. Элементарной фигурой называется построение, состоящее из необходимого числа измерений.

При вычислении ориентирующих углов земной хорды по измеренным направлениям пункт-спутник, выполненным с обоих пунктов, элементарной будет фигура, состоящая из двух синхронных треугольников. В этом случае задача по определению ориентирующих углов хорды (единичного вектора пункт-пункт) сводится к троекратному вычислению векторных произведений соответствующих единичных векторов (метод Вяйсяля).

Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | S0 | UT1 | $$\tilde{a}\_{is}^{'}$$ | $$\tilde{δ}\_{is}^{'}$$ | $$\tilde{a}\_{Js}^{'}$$ | $$\tilde{δ}\_{js}^{'}$$ |
| 4 | $$13^{h}48^{m}37,258^{s}$$ | $$20^{h}02^{m}59,994^{s}$$ | $$211^{o}46^{'}22,22^{''}$$ | $$38^{o}48^{'}44,20^{''}$$ | $$153^{o}43^{'}20,62^{''}$$ | $$-0^{o}58^{'}54,51^{''}$$ |
| 2 | $$13^{h}44^{m}40,696^{s}$$ | $$19^{h}45^{m}11,994^{s}$$ | $$232^{o}33^{'}53,94^{''}$$ | $$57^{o}05^{'}03,75^{''}$$ | $$145^{o}44^{'}40,56^{''}$$ | $$17^{o}36^{'}44,24^{''}$$ |

*Решение:*

1. Вычисляем момент гринвичского звёздного времени для первого наблюдения ИСЗ

$$S\_{1}=S\_{01}+1.00274∙UT1\_{1}$$

$$S\_{1}=13^{h}48^{m}37,258^{s}+1.00274∙20^{h}02^{m}59,994^{s}=33^{h}51^{m}07,896^{s}$$

2. Вычисляем направляющие косинусы направлений пункт – спутник с

обоих пунктов i и j на первый момент времени наблюдения ИСЗ

$L\_{i1}^{∕}=\cos(\left(\tilde{a}\_{i}^{'}-S\_{1}\right))∙cos\tilde{δ}\_{is}^{'} M\_{i1}^{∕}=\sin(\left(\tilde{a}\_{i}^{'}-S\_{1}\right))∙cos\tilde{δ}\_{is}^{'} ; N\_{i1}^{∕}=sin\tilde{δ}\_{is}^{'}$*;*$ $

$$L\_{j1}^{∕}=\cos(\left(\tilde{a}\_{j}^{'}-S\_{1}\right))∙cos\tilde{δ}\_{js}^{'} M\_{j1}^{∕}=\sin(\left(\tilde{a}\_{j}^{'}-S\_{1}\right))∙cos\tilde{δ}\_{js}^{'} ; N\_{j1}^{∕}=sin\tilde{δ}\_{js}^{'}$$

$$L\_{i1}^{∕}=(-0.99932)∙0.7792 M\_{i1}^{{}/{}}=0.0363∙0.7792 ; N\_{i1}^{{}/{}}=0.6268$$

$$L\_{i1}^{∕}=-0.7787 M\_{i1}^{{}/{}}=0.0283; N\_{i1}^{{}/{}}=0.6268$$

$$L\_{j1}^{∕}=(-0.4980)∙0.9998 M\_{j1}^{{}/{}}=0.8671∙0.9998 ; N\_{j1}^{{}/{}}=0.0171$$

$$L\_{j1}^{∕}=-0.4979 M\_{j1}^{{}/{}}=0.8669 ; N\_{j1}^{{}/{}}=0.0171$$

3. Вычисляем момент гринвичского звёздного времени для dnjhjuj наблюдения ИСЗ

$$S\_{2}=S\_{02}+1.00274∙UT1\_{2}$$

$$S\_{2}=13^{h}44^{m}40,696^{s}+1.00274∙19^{h}45^{m}11,994^{s}=33^{h}35^{m}25,653^{s}$$

4. Вычисляем направляющие косинусы направлений пункт – спутник с

обоих пунктов i и j на второй момент времени наблюдения ИСЗ

$L\_{i2}^{∕}=\cos(\left(\tilde{a}\_{i}^{'}-S\_{2}\right))∙cos\tilde{δ}\_{is}^{'} M\_{i2}^{∕}=\sin(\left(\tilde{a}\_{i}^{'}-S\_{2}\right))∙cos\tilde{δ}\_{is}^{'} ; N\_{i1}^{∕}=sin\tilde{δ}\_{is}^{'}$*;*$ $

$$L\_{j2}^{∕}=\cos(\left(\tilde{a}\_{j}^{'}-S\_{2}\right))∙cos\tilde{δ}\_{js}^{'} M\_{j2}^{∕}=\sin(\left(\tilde{a}\_{j}^{'}-S\_{2}\right))∙cos\tilde{δ}\_{js}^{'} ; N\_{j1}^{∕}=sin\tilde{δ}\_{js}^{'}$$

$$L\_{i2}^{∕}=(-0.9471)∙0.5434 M\_{i2}^{{}/{}}=(-0,3208)∙0.5434 ; N\_{i2}^{{}/{}}=0.8395$$

$$L\_{i2}^{∕}=-0.5146 M\_{i2}^{{}/{}}=-0.1743; N\_{i2}^{{}/{}}=0.8395$$

$$L\_{j2}^{∕}=(-0.3729)∙0.9531 M\_{j2}^{{}/{}}=0.9279∙0.9531 ; N\_{j2}^{{}/{}}=0.3026$$

$$L\_{j2}^{∕}=-0.3554 M\_{j2}^{{}/{}}=0.8844 ; N\_{j2}^{{}/{}}=0.3026$$

5. Вычисляем направляющие косинусы вектора, перпендикулярного синхронной плоскости, соответствующей первому моменту времени наблюдения ИСЗ

$$L\_{ij1}^{∕}=\frac{M\_{i1}∙N\_{j1}-M\_{j1}∙N\_{i1}}{\sqrt{1-(L\_{i1}∙L\_{j1}+M\_{i1}∙M\_{j1}+N\_{i1}∙N\_{j1})^{2}}}$$

$$M\_{ij1}^{∕}=\frac{L\_{i1}∙N\_{j1}-L\_{j1}∙N\_{i1}}{\sqrt{1-(L\_{i1}∙L\_{j1}+M\_{i1}∙M\_{j1}+N\_{i1}∙N\_{j1})^{2}}}$$

$$N\_{ij1}^{∕}=\frac{L\_{i1}∙M\_{j1}-L\_{j1}∙M\_{i1}}{\sqrt{1-(L\_{i1}∙L\_{j1}+M\_{i1}∙M\_{j1}+N\_{i1}∙N\_{j1})^{2}}}$$

$$L\_{ij1}^{∕}=\frac{0.0283∙0.0171-0.8669∙0.6268}{\sqrt{1-((-0.7787∙(-0.4979)+0.0283∙0.8669+0.6268∙0.0171)^{2}}}$$

$$L\_{ij1}^{∕}=\frac{0.000484-0.5434}{\sqrt{1-(0.3877+0.0245+0.0107)^{2}}}=\frac{-0.5429}{0.906}=-0.599$$

$$M\_{ij1}^{∕}=\frac{-0.7787∙0.0171-(-0.4979)∙0.6268}{\sqrt{1-(0.3877+0.0245+0.0107)^{2}}}=\frac{0.2988}{0.906}=0.3298$$

$$N\_{ij1}^{∕}=\frac{-0.7787∙0.8669-(-0.4979)∙0.6268}{\sqrt{1-(0.3877+0.0245+0.0107)^{2}}}=\frac{-0.363}{0.906}=-0.400$$

6. Вычисляем направляющие косинусы вектора, перпендикулярного синхронной плоскости, соответствующей второму моменту времени наблюдения ИСЗ

$$L\_{ij2}^{∕}=\frac{M\_{i2}∙N\_{j2}-M\_{j2}∙N\_{i2}}{\sqrt{1-(L\_{i2}∙L\_{j2}+M\_{i2}∙M\_{j2}+N\_{i2}∙N\_{j2})^{2}}}$$

$$M\_{ij2}^{∕}=\frac{L\_{i2}∙N\_{j2}-L\_{j2}∙N\_{i2}}{\sqrt{1-(L\_{i2}∙L\_{j2}+M\_{i2}∙M\_{j2}+N\_{i2}∙N\_{j2})^{2}}}$$

$$N\_{ij2}^{∕}=\frac{L\_{i2}∙M\_{j2}-L\_{j2}∙M\_{i2}}{\sqrt{1-(L\_{i2}∙L\_{j2}+M\_{i2}∙M\_{j2}+N\_{i2}∙N\_{j2})^{2}}}$$

$$L\_{ij2}^{∕}=-0,627$$

$$M\_{ij2}^{∕}=0,317$$

$$N\_{ij2}^{∕}=-0,418$$

7. Вычисляем направляющие косинусы вектора пункт-пункт (земная хорда)

$$L\_{ij}^{∕}=\frac{M\_{ij1}∙N\_{ij2}-M\_{ij2}∙N\_{ij1}}{\sqrt{1-(L\_{ij1}∙L\_{ij2}+M\_{ij1}∙M\_{ij2}+N\_{ij1}∙N\_{ij2})^{2}}}$$

$$M\_{ij}^{∕}=\frac{L\_{ij2}∙N\_{ij1}-L\_{ij1}∙N\_{ij2}}{\sqrt{1-(L\_{ij1}∙L\_{ij2}+M\_{ij1}∙M\_{ij2}+N\_{ij1}∙N\_{ij2})^{2}}}$$

$$N\_{ij}^{∕}=\frac{L\_{ij1}∙M\_{ij2}-L\_{ij2}∙M\_{ij1}}{\sqrt{1-(L\_{ij1}∙L\_{ij2}+M\_{ij1}∙M\_{ij2}+N\_{ij1}∙N\_{ij2})^{2}}}$$

$$L\_{ij}^{∕}=0.621$$

$$M\_{ij}^{∕}=0.288$$

$$N\_{ij}^{∕}=0.381$$

8. Вычисляем ориентирующие углы земной хорды

$$Λ\_{ij}^{}=arctg\frac{M\_{ij}}{L\_{ij}}$$

$$Ф\_{ij}^{}=arctg\frac{N\_{ij}}{\sqrt{L\_{ij}^{2}+M\_{ij}^{2}}}$$

$Λ\_{ij}^{}=arctg\frac{0.288}{0.621}=0.4638 $или 24°52'55"

$Ф\_{ij}^{}=arctg\frac{N\_{ij}}{\sqrt{L\_{ij}^{2}+M\_{ij}^{2}}}=arctg\frac{0,381}{0,6845}=0,5566$ или 29°06'01"

**Задание № 6**

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений возмущённого движения ИСЗ.

Постановка задачи

Задана система дифференциальных уравнений возмущённого движения ИСЗ вида

$$\ddot{x}=f\left(x, y,z\right); f\left(x, y,z\right)=-μ\frac{x}{r^{3}}+\frac{3}{2}∙J\_{2}μ\frac{a\_{e}^{2}}{r^{5}}\left(\frac{5xz^{2}}{r^{2}}-x\right)$$

$$\ddot{y}=φ\left(x, y,z\right); φ\left(x, y,z\right)=-μ\frac{y}{r^{3}}+\frac{3}{2}∙J\_{2}μ\frac{a\_{e}^{2}}{r^{5}}\left(\frac{5yz^{2}}{r^{2}}-y\right)$$

$$\ddot{z}=ψ\left(x, y,z\right); ψ\left(x, y,z\right)=-μ\frac{z}{r^{3}}+\frac{3}{2}∙J\_{2}μ\frac{a\_{e}^{2}}{r^{5}}\left(\frac{5z^{3}}{r^{2}}-3z\right)$$

с начальными условиями интегрирования 𝑥0 , 𝑦0 , 𝑧0 , $\ddot{x\_{0}}$ , $\ddot{y\_{0}}$, $\ddot{z\_{0}}$ 𝑡0 .

Требуется вычислить координаты и составляющие скорости ИСЗ в конце первого шага H интегрирования. Шаг интегрирования принять равным 60s.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | t0, с | x0, м | y0, м | z0, м | x'0, мc-1 | y'0, мc-1 | z'0, мc-1 |
| 4 | 360 | -1988696,673 | -7191208,382 | 2374228,391 | 3063,307 | 1240,226 | 6318,710 |

*Решение:*

1. Вычисляем правые части дифференциальных уравнений

$$ f\_{0}\left(x, y,z\right)=-μ\frac{x}{r^{3}}+\frac{3}{2}∙J\_{2}μ\frac{a\_{e}^{2}}{r^{5}}\left(\frac{5xz^{2}}{r^{2}}-x\right)$$

$$ φ\_{0}\left(x, y,z\right)=-μ\frac{y}{r^{3}}+\frac{3}{2}∙J\_{2}μ\frac{a\_{e}^{2}}{r^{5}}\left(\frac{5yz^{2}}{r^{2}}-y\right)$$

$$ψ\_{0}\left(x, y,z\right)=-μ\frac{z}{r^{3}}+\frac{3}{2}∙J\_{2}μ\frac{a\_{e}^{2}}{r^{5}}\left(\frac{5z^{3}}{r^{2}}-3z\right)$$

$$r\_{s}=\sqrt{x\_{0}^{2}+y\_{0}^{2}+z\_{0}^{2}}$$

где μ = 3,9860044\*1014 м3с-2

*J*2 = 0,001082636;

ае = 6378136 м

$$r\_{s}=\sqrt{x\_{0}^{2}+y\_{0}^{2}+z\_{0}^{2}}=\sqrt{(-1988696,673)^{2}+(-7191208,382)^{2}+2374228,391^{2}}=7829623,235$$

$$f\left(x, y,z\right)=- 3,9860044∙10^{14}\frac{-1988696,673}{7829623,235^{3}}+\frac{3}{2}∙0,001082636∙3,9860044∙10^{14}∙$$

$$∙\frac{6378136^{2}}{7829623,235^{5}}\left(\frac{5∙\left(-1988696,673\right)∙2374228,391^{2}}{789623,235^{2}}-\left(-1988696,673\right)\right)=1610$$

$$φ\left(x, y,z\right)=- 3,9860044∙10^{14}\frac{-7191208,382}{7829623,235^{3}}+\frac{3}{2}∙0,001082636∙3,9860044∙10^{14}∙$$

$$∙\frac{6378136^{2}}{7829623,235^{5}}\left(\frac{5∙\left(-7191208,382\right)∙2374228,391^{2}}{789623,235^{2}}-\left(-7191208,382\right)\right)=-0,2844$$

$$ψ\left(x, y,z\right)=- 3,9860044∙10^{14}\frac{2374228,391}{7829623,235^{3}}+\frac{3}{2}∙0,001082636∙3,9860044∙10^{14}∙$$

$$∙\frac{6378136^{2}}{7829623,235^{5}}\left(\frac{5∙2374228,391^{3}}{789623,235^{2}}-3∙2374228,391\right)=-0,1769$$

2. Вычисляем в первом приближении координаты ИСЗ в подшагах

$$x\_{k}^{(1)}=x\_{0}+α\_{k}H\ddot{x}\_{0}+\frac{1}{2}α\_{k}^{2}H^{2}f\_{0}$$

$$y\_{k}^{(1)}=y\_{0}+α\_{k}H\ddot{y}\_{0}+\frac{1}{2}α\_{k}^{2}H^{2}φ\_{0}$$

$$z\_{k}^{(1)}=z\_{0}+α\_{k}H\ddot{z}\_{0}+\frac{1}{2}α\_{k}^{2}H^{2}ψ\_{0}$$

k= 1,2,3

α1 = 0,212340538

α2 = 0,590533136

α3 = 0,911412040

H=60s

$$x\_{k}^{(1)}=-1988696,673+0.212340538∙360∙3063,307+\frac{1}{2}0.212340538^{2}∙360^{2}∙1610$$

$$x\_{k}^{(1)}=-1988696,673+0.212340538∙360∙3063,307+\frac{1}{2}0.212340538^{2}∙360^{2}∙1610=2949463.91$$

$$y\_{k}^{(1)}=-7191208,382+0.590533136∙360∙1240.226+\frac{1}{2}0.590533136^{2}∙360^{2}∙\left(-0.2844\right)$$

$$y\_{k}^{(1)}=-6933973.11$$

$$z\_{k}^{(1)}=2374228,391+0.911412040∙360∙6318.71+\frac{1}{2}360^{2}∙0.911412040^{2}∙(-0.1769)$$

$$z\_{k}^{(1)}=4437927.71$$

3. Вычисляем в первом приближении значения правых частей в подшагах

$f\_{k}^{(1)}=f(x\_{k}^{\left(1\right)}, y\_{k}^{\left(1\right)},z\_{k}^{(1)}$)

$$φ\_{k}^{(1)}=φ(x\_{k}^{\left(1\right)}, y\_{k}^{\left(1\right)},z\_{k}^{\left(1\right)})$$

$$ψ\_{k}^{(1)}=ψ(x\_{k}^{\left(1\right)}, y\_{k}^{\left(1\right)},z\_{k}^{\left(1\right)})$$

$f\_{k}^{(1)}=1610(2949463.91;-6933973.11; 4437927.71$)

$φ\_{k}^{(1)}=-0.2844(2949463.91;-6933973.11; 4437927.71$)

$ψ\_{k}^{(1)}=-0.1769(2949463.91;-6933973.11; 4437927.71$)

4. Вычисляем в первом приближении p, q, r

$$\left(\begin{array}{c}p\_{1}^{(1)} q\_{1}^{(1)} r\_{1}^{(1)}\\p\_{2}^{(1)} q\_{2}^{(1)} r\_{2}^{(1)}\\p\_{3}^{(1)} q\_{3}^{(1)} r\_{3}^{(1)}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}α\_{1} α\_{1}^{2} α\_{1}^{3}\\α\_{2} α\_{2}^{2} α\_{2}^{3}\\α\_{3} α\_{3}^{2} α\_{3}^{3}\end{array}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c}f\_{1}^{(1)}-f\_{0} φ\_{1}^{(1)}-φ\_{0} ψ\_{1}^{(1)}-ψ\_{0}\\f\_{2}^{(1)}-f\_{0} φ\_{2}^{(1)}-φ\_{0} ψ\_{2}^{(1)}-ψ\_{0}\\f\_{3}^{(1)}-f\_{0} φ\_{3}^{(1)}-φ\_{0} ψ\_{3}^{(1)}-ψ\_{0}\end{array}\right)$$

Вычисление в этом и последующем пунктах невозможны в связи с невозможностью вычисления матрицы в п.3 (неизвестны дальнейшие операции с матрицей – сложение, вычитание, умножение (?)).

5. Вычисляем во втором приближении координаты ИСЗ в подшагах



6. Вычисляем во втором приближении значения правых частей в подшагах



7. Вычисляем во втором приближении p, q, r



8. Процесс приближений продолжаем до тех пор, пока p, q, r не стабилизируются. После стабилизации p, q, r решение в конце шага будет





**Задание № 7**

Вычисление координат земного полюса по наблюдениям квазаров

Базой РСДБ выбираем Сьерра Негра – Грин Бэнк

Исходные данные

Координаты радиотелескопов

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Станция | X, м | Y, м | Z, м |
| Сьерра Негра, Мексика | -630374,17 | -5997609,56 | 2076517,97 |
| Грин Бэнк, США | 1030564,74 | -4848425,92 | 4013891,04 |

Измеренные линейные задержки в метрах

|  |  |
| --- | --- |
| № | сτ(0), м |
| Сьерра-Негра – Грин Бэнк |
| 6 | 793342,663 |
| 7 | -567098,271 |
| 8 | 669659,990 |
| 9 | 1692952,195 |
| 10 | 2410747,150 |
| 11 | 1810250,515 |

Сферические координаты квазаров в градусах

|  |  |
| --- | --- |
| № | Сьерра-Негра – Грин Бэнк |
| γ,0 | δ,0 |
| 6 | 200 | 60 |
| 7 | 240 | 31 |
| 8 | 280 | 42 |
| 9 | 320 | 42 |
| 10 | 350 | 55 |
| 11 | 185 | 86 |

*Решение:*

Уравнение связи в методе радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой (РСДБ) имеет вид:

𝑐𝜏= ΔX 𝐿+ Δ𝑌 𝑀+ Δ𝑍 𝑁+ 𝑥𝑝 (∆𝑋 𝑁− ∆𝑍 𝐿) + 𝑦𝑝 (∆𝑍𝑀− ∆𝑌 𝑁)

где с – скорость света;

τ – временная задержка прихода шумовой волны от квазара на одну и на

другую антенну РСДБ;

∆𝑋, ∆𝑌, ∆𝑍 - разности координат станций, образующих базу РСДБ;

$L=cosγcosδ, M=sinγsinδ, N= sinδ$ направляющие косинусы геоцентрического вектора квазара

γ, δ - сферические координаты квазара в гринвичской системе координат

𝑥𝑝, 𝑦𝑝 – координаты земного полюса

Определим разности координат станций, образующих базу РСДБ ∆𝑋, ∆𝑌, ∆𝑍

∆𝑋 = 1030564,74-(-630374,17) = 1660938,91

∆𝑌 = -4848425,92-(-5997609,56) = 1149183,64

∆𝑍 = 4013891,04-2076517,97 = 1937373,07

Тогда для первой точки наблюдения (№6) имеем:

$$L=-0,9397∙0,5= -0,4698, M=\left(-0,342\right)∙0,866=-0,296 , N= 0,866$$

793342,663 = 1660938,91 (-0,4698)+ 1149183,64 (-0,296)+ 1937373,07 0,866+ 𝑥𝑝 (1660938,91 0,866− 1937373,07 (-0,4698) + 𝑦𝑝 (1937373,07 (-0,296)− 1149183,64 0,866)

793342,663 = -780309,10-340158,36+ 167765,08+ 𝑥𝑝 (1438373,10+910177,87) + 𝑦𝑝 (-573462,43− 995193,03)

793342,663 = -250702,38+ 167765,08+ 𝑥𝑝 2348550,97 + 𝑦𝑝 (-1568655,46)

Отсюда:

𝑥𝑝 2348550,97 + 𝑦𝑝 (-1568655,46) = 876279,96

Аналогично вычисляются координаты для точек №№ 7,8,9,10,11.

Список использованной литературы

1. В.И. Крылов. Космическая геодезия: Учебное пособие – М.:УПП «Репрография» МИИГАиК, 2002, 168 с.; ил.

2. В.И. Крылов. Координатно-временные преобразования в геодезии: Учебное пособие – М.: Изд-во МИИГАиК, 2014, 90 с.; ил.

3. В.И. Крылов. Основы теории движения ИСЗ (часть первая: невозмущённое движение): учебное пособие. – М.: МИИГАиК, 2015. - 52 с.: ил.

4. В.И. Крылов. Основы теории движения ИСЗ (часть вторая: возмущённое движение): учебное пособие – М.: МИИГАиК, 2016. - 67 с., ил.

5. Космическая геодезия. Учебник для вузов /В.Н. Баранов, Е.Г. Бойко,

И.И. Краснорылов и др. – М.: Недра, 1986.

6. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике.

Абалакин В.К., Аксёнов Е.П., Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976.