Задание 1. Вычислить указанную сумму целых чисел:

Решение:

Имеем:

Задание 2. Вычислить указанную сумму целых чисел:

Решение:

Рассмотрим сначала :

Тогда для следующего :

Тогда можно записать:

где – целая часть числа .

Задание 3. Найдите число, являющееся значением суммы

Решение:

Задание 4. Решите однородное рекуррентное уравнение с начальными условиями:

Решение:

При имеем следующее уравнение:

Составляем характеристическое уравнение:

Имеем многочлен степени 3 с целыми коэффициентами:

Известно, что целые корни многочлена с целыми коэффициентами являются делителями его свободного коэффициента. В нашем случае свободный коэффициент имеет делители . Вычисляем . Это значит, что является корнем, а, значит, исходный многочлен делится на .

Разделив на получаем:

Далее,

Т.е. корни характеристического уравнения есть кратности 2 и кратности 1. Тогда общее решение рекуррентного уравнения имеет вид:

Коэффициенты найдем из начальных условий:

Решаем полученную систему:

Получили частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

Задание 5. Решите неоднородное рекуррентное уравнение с начальным условием:

Решение:

При имеем следующее уравнение:

Для всех положим

Подставляем в исходное уравнение:

Получаем:

Уравнение для станет однородным, если , т.е. .

При таком выборе находим решение однородного уравнения:

Корень характеристического уравнения:

И получаем общее решение:

Возвращаемся к переменной :

Подставляем начальное условие и находим константу:

Окончательно имеем следующее решение неоднородного рекуррентного уравнения:

Задание 6. Найдите число перестановок элементов , оставляющих ровно элементов неподвижными.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 15 | 7 | 6 |

Решение:

Число перестановок из элементов, в которой ровно остаются неподвижными, вычисляется по формуле:

В нашем случае:

Т.е. нет перестановок, при которой только один элемент меняет свое расположение.

Задание 7.

Постройте матрицы смежности и инциденций графа.

Постройте Эйлеров и Гамильтонов циклы или докажите, что соответствующий цикл не существует.

Найдите хроматическое число и оптимальную раскраску вершин графа.

15. Ребра 12, 14, 23, 24, 25, 26, 35, 45.

Решение:

Изобразим наш граф:



Строим матрицу смежности:

Тогда матрицасмежности :

Матрица инциденций имеет размерность по числу вершин и ребер графа соответственно и строится следующим образом:

Тогда матрица инциденций (единицы в столбце указывают, какие вершины соединены данным ребром):

Эйлеров цикл – цикл, проходящий через каждое ребро один раз. Эйлеров цикл в графе существует тогда и только тогда, когда выполнены два условия: граф связан и степень каждой вершины четна. Т.к. в матрице смежности нашего графа есть строки с нечетным числом единиц, то не у всех вершин четные степени, а, значит, Эйлеров цикл построить нельзя.

Гамильтоновым называется цикл, проходящий ровно один раз через каждую вершину графа. Из-за некоторой «изолированности» вершины 6 не существует цикла, позволяющего пройти все вершины ровно один раз и вернуться в исходную вершину, т.е. гамильтонова цикла в графе нет (при этом гамильтонов маршрут существует, например: 14, 45, 53, 32, 26).

Раскраской графа с вершинами называется набор цветов – натуральных чисел, приписанных вершинам так, что любые две смежные вершины имеют различные цвета. При этом минимальное число цветов, достаточное для раскраски графа, называется хроматическим числом .

В нашем графе есть треугольники, поэтому . С другой стороны, можно построить раскраску в три цвета, например:

Таким образом,

Задание 8. Решить следующее уравнение в целых числах:

Решение:

Т.к. , то уравнение разрешимо.

Решаем следующее уравнение: .

Добавляя к правой части число 21, получаем:

Тогда:

Выполним проверку и подставим в исходное уравнение:

Приводя подобные, получаем тождество:

Таким образом, решение уравнения: .