**Задание 1**

**РАЗДЕЛ № 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

**Задача 1.** Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка

**Решение**

Найдем собственные вектора заданного линейного оператора. Число λ есть собственное число оператора A в том и только том случае, когда . Запишем характеристическое уравнение:

Решим найденное уравнение, чтобы найти собственные числа

Его характеристические корни являются собственными числами.

Собственный вектор для собственного числа  найдем из системы с основной матрицей Приведем эту матрицу к ступенчатому виду:

Отсюда

и мы имеем собственный вектор

Собственный вектор для собственного числа  найдем из системы с основной матрицей Приведем эту матрицу к ступенчатому виду:

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, имеет две свободных переменных: .

и мы имеем собственный вектор

Ответ:

**Задача 2**. Доказать совместность системы и решить её тремя способами: по формулам Крамера, методом Гаусса и средствами матричного исчисления.

**Решение**

Запишем расширенную матрицу системы и приводим её к ступенчатому виду.

Умножим первую строку на и прибавим ко второй строке, затем первую строку умножим на прибавим к третьей строке. Получим:

Ненулевых строк 2, следовательно, ранг матрицы А равен двум, т.е. . Ранг расширенной матрицы также равен , Следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система совместна и имеет бесконечное множество решений (*так как ранг матрицы меньше, чем количество неизвестных*).

Выберем в качестве базисного минор . Тогда, полагая , получаем:

По правилу Крамера находим

Таким образом общее решение системы:

**Проверка**

Найдем общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

В качестве базисных переменных принимаем а переменные свободными. Тогда находим общее решение (*выражаем базисные переменные через свободные*):

где любое число

Проверка:

Для решения системы методом обратной матрицы количество уравнений должно быть равно числу неизвестных.

**Задача 3**. Исследовать и найти общее решение системы линейных однородных уравнений.

**Решение**

Запишем расширенную матрицу системы

Найдём решения СЛАУ, используя [метод Гаусса](https://math1.ru/education/sys_lin_eq/gauss.html):

Умножим первую строку на и прибавим ко второй строке, затем первую строку умножим на прибавим к третьей строке. Прибавим к второй строке третью. Получим:

Запишем систему в привычном виде:

В качестве базисных переменных принимаем ,а переменные   свободными. Тогда находим общее решение (*выражаем базисные переменные через свободные*):

Проверка:

Ответ:

**РАЗДЕЛ № 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА**

**Задача 1.** Составить уравнение плоскости *Р,* проходящей через точку *А*

перпендикулярно вектору *BC* . Написать ее общее уравнение, а также

нормальное уравнение плоскости и уравнение плоскости в отрезках. Составить уравнение плоскости , проходящей через точки *А, В, С*. Найти угол между плоскостями *Р* и . Найти расстояние от точки *D* до плоскости *Р*.

**Решение**

►Координаты вектора

Уравнение плоскости, проходящей через точку

перпендикулярно вектору

Подставляя найденные значения      и координаты точки

и координаты точки **,** получим

или

–общее уравнение плоскости *Р.*

Разделим обе части полученного равенства на шесть:

Отправляем коэффициенты при переменных x, y и z в знаменатели и получаем требуемое уравнение плоскости в отрезках

►Получим уравнение плоскости, используя уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A,B,C. Уравнение плоскости, проходящей через данные точки имеет вид

В данном случае

Ответ:

►Вычислим угол между плоскостями *Р* и

Ответ:

►Расстояние от точки до плоскости  определяется по формуле .

В данном случае

Ответ:

**Задача 2.** Прямая *:* задана в пространстве общими уравнениями. Написать её каноническое и параметрическое уравнения. Составить уравнение прямой , проходящей через точкупараллельно прямой *l*, и вычислить расстояние между ними. Найти проекцию точки *М* на прямую *l* и точку пересечения прямой *l* и плоскости .

**Решение**

►Канонические уравнения прямой:

где  – координаты какой-либо точки прямой,  – ее направляющий вектор.

Находим

Найдем какую-либо точку прямой . Пусть  , тогда

Следовательно,  – координаты точки, принадлежащей прямой.

Канонические уравнения прямой:

 Находим параметрические уравнения прямой. Для этого полагаем

откуда получаем

►Очевидно, направляющим вектором прямой  является вектор с координатами . Этот же вектор является направляющим вектором прямой, уравнение которой мы составляем. По условию эта прямая проходит через точку , следовательно, ее канонические уравнения имеют вид

►Очевидно, прямая  проходит через точку . Вычислим расстояние  от этой точки до прямой  - оно даст нам искомое расстояние между параллельными прямыми.

Прямая  проходит через точку . Обозначим [направляющий вектор прямой](http://www.cleverstudents.ru/line_and_plane/directing_vector_of_line.html)  как , он имеет координаты . Вычислим координаты вектора  :

 .

Найдем [векторное произведение векторов](http://www.cleverstudents.ru/vectors/vector_product_of_vectors.html):

Теперь осталось применить формулу, позволяющую вычислить расстояние от точки до прямой в пространстве:

 Ответ: расстояние между заданными параллельными прямыми равно .

►Составим уравнение плоскости, проходящей через точку М и перпендикулярной данной прямой .Направляющий вектор прямой  может служить вектором нормали к плоскости.

Общий вид уравнения плоскости:

Подставляем вместо  координаты вектора нормали, вместо   - координаты  точки M. Получим:

 Отсюда .

Искомая плоскость:

Точка пересечения данной прямой и полученной плоскости будет проекцией точки М на данную прямую.

 отсюда .

Координаты проекции:

  Ответ:

►Чтобы найти точки пересечения прямой и плоскости  , решим систему уравнений:

- искомая точка пересечения прямой и плоскости.

Ответ:

**РАЗДЕЛ № 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Задача 1**Даны координаты вершин треугольника *АВС*. Составить уравнения сторон треугольника. Составить уравнения медианы, высоты и биссектрисы угла *А*, найти их длины. Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника и параллельных его сторонам

**Решение**

►Составим уравнения сторон:

►Медиана, проведенная из вершины A делит противолежащую сторону ВC треугольника пополам. Найдем координаты точки М середины стороны ВC:

Получаем

Подставим координаты точек в уравнение прямой, проходящей через две точки, найдем уравнение медианы AM:

.

Ответ:3,354

►Составим уравнение высоты, проведенной из вершины A.

Так как AH ⊥ BC,следовательно .

Угловой коэффициент прямой AC:

Следовательно, . Так как прямая AH проходит через вершину A(0; 4), то есть , то воспользуемся уравнением прямой, проходящей через точку с данным угловым коэффициентом:

Уравнение высоты из вершины A:

.

Ответ: .

►Длину высоты AH найдем как расстояние от точки до прямой BC по формуле

В нашем случае уравнение прямой BC:

Ответ:

►Так как биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению двух прилежащих сторон (теорема о биссектрисе), и используя формулы для нахождения координат точки, делящей отрезок в данном отношении, имеем:

 Составим уравнения внутренних биссектрис:

Отчет:

►Так как искомая прямая параллельна прямой , то их угловые коэффициенты равны. Угловой коэффициент искомой прямой

Уравнение прямой запишем в виде уравнения пучка прямых, проходящих через точку A: . Подставив в уравнение координаты точки и значение , получим

Аналогично искомую прямую параллельную прямой запишем в виде уравнения пучка прямых, проходящих через точку В: . Подставив в уравнение координаты точки и значение , получим

Прямую параллельную прямой запишем в виде уравнения пучка прямых, проходящих через точку В: . Подставив в уравнение координаты точки и значение , получим

Ответ:.

**Задача 2**. По координатам вершин пирамиды *АВСD* средствами векторной алгебры найти:

1) длины ребер АВ и АС;

2) угол между ребрами АВ и АС;

3) площадь грани *АВС*;

4) проекцию вектораAB наAC ;

5) объем пирамиды.

**Решение**

1)Найдем направляющие векторы ребер

Найдем длину ребра и АС

;

Ответ: ед.;

2)Угол между рёбрами АВ и АС равен углу между их направляющими векторами. Найдём его по формуле:

Координаты этих векторов:

Тогда угол α определим из соотношения

Тогда

Ответ:

3) Площадь грани находим с помощью векторного произведения векторов. Так как выше найдены координаты векторов

тогда площадь треугольника находим по формуле

Найдем векторное произведение векторов

модуль векторного произведения равен

откуда находим площадь треугольника

Ответ:

4)

Ответ:

5) Объем пирамиды находим с помощью смешанного произведения векторов по формуле

,

так как выше найдены координаты векторов

и

подставим координаты векторов в формулу, получим

**Ответ:**